

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Institut dopravy

**Řízení rozběhu mostového jeřábu s
ohledem na kývání břemene**

Disertační práce

Studijní program: P2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 2301V001 Dopravní a manipulační technika
Školitel: doc. Ing. Leopold Hrabovský, Ph.D.
Doktorand: Ing. Pavel Vraník

Ostrava 2012

ANOTACE

VRANÍK, P. *Řízení rozběhu mostového jeřábu s ohledem na kývání břemene : disertační práce*. Ostrava : VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Institut dopravy, 2012, 129 s. Školitel: Hrabovský, L.

Disertační práce se zabývá problematikou kývání břemene při rozjezdu mostového jeřábu či jeřábové kočky.

V úvodní části disertační práce je uvedena definice problému kývání břemene s ohledem na náběhové úhly lana na drážkovaný lanový buben, včetně popisu současného stavu, tj. systémů a prostředků potlačujících kývání břemene, které jsou v současné době k dispozici na evropském trhu.

Vlastní část disertační práce se zabývá zpřesněním matematického popisu pohybu jeřábové kočky a břemene, kdy je mj. uvažován další stupeň volnosti, prostřednictvím kterého je zároveň zohledněn tvar zavěšeného břemene.

Matematický popis pohybu kočky s břemenem, resp. jeho aproximované a numerické řešení, umožňuje na základě deseti vstupních veličin vykreslit průběhy vychýlení a zrychlení hledaných veličin a na jejich základě okamžitě vypočítává největší možné zrychlení jeřábové kočky s ohledem na hodnoty úhlů vychýlení lana a břemene, přičemž hodnoty těchto úhlů je možné ve výpočtu nastavit.

Přesnost nového matematického popisu a jeho řešení byla experimentálně ověřena na měřicím pracovišti, které bylo pro účely této disertační práce vybudováno a jehož konstrukční návrh včetně výpočtů je rovněž uveden v této disertační práci.

V závěru disertační práce je provedeno zhodnocení dosažených výsledků, včetně komentářů a doporučení pro další postup ve výzkumu problematiky kývání břemene.

ANNOTATION

VRANÍK, P. *Stepless speed control of overhead crane with reference to oscillating weight : dissertation thesis*. Ostrava : VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Institute of Transport, 2012, 129 p. Supervisor: Hrabovský, L.

This dissertation thesis deals with problem of swinging of a load at the start of an overhead crane or electric hoist.

Firstly, a definition of problem called swinging of a load with reference to fleet angle onto grooved cable drum is stated, as well as a description of the present state in this field. This description includes the systems and means available in the European market that restrict the load swinging.

The main part of dissertation thesis deals with improvement of the mathematical theory that describes a motion of an overhead crane and electric hoist. The next degree of freedom is considered, thus the innovated mathematical theory also deliberates the load shape.

An approximate solution of the mathematical description of crane or hoist motion makes it possible to plot charts of deflection and acceleration of the inquired unknowns as well as to determine the maximal value of electric hoist acceleration. At this acceleration value, the allowed values of wire rope and load deflection, which may be set in approximate solution, will be adhered.

An accuracy of innovated mathematical description and its solution was experimentally verified on a measurement assembly constructed for the purposes of this dissertation thesis. Design and calculation of the measurement assembly are stated as well.

The last part of this dissertation thesis includes an evaluation of reached results as well as the comments and recommendation for the next progress in solution of this problem.

Poděkování

Rád bych na tomto místě upřímně poděkoval svému školiteli, doc. Ing. Leopoldu Hrabovskému, Ph.D., za cenné rady a připomínky k řešené problematice, pedagogický vzor a za vstřícný a profesionální přístup po celou dobu studia.

Dále bych rád poděkoval RNDr. Petru Kaňovskému, člověku s nesmírným darem nejen na matematiku, za ochotnou pomoc při řešení velmi složité soustavy nelineárních diferenciálních rovnic.

Mé díky rovněž patří Ing. Martinu Horákovi za pomoc při realizaci měřicího pracoviště.

Rád bych také poděkoval svým rodičům a svému bratru za vynikající rodinné zázemí a podporu během celé doby mých studií.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ	3
1 ÚVOD.....	7
1.1 DEFINICE PROBLÉMU	8
2 POPIS SOUČASNÉHO STAVU	10
2.1 MECHANICKÁ STABILIZACE BŘEMENE	10
2.1.1 Mechanická modifikace jeřábu se speciálním uspořádáním nosných lan	10
2.1.2 Stabilizace břemene mechanickým tubusem	12
2.2 ELEKTRONICKÁ STABILIZACE BŘEMENE.....	13
2.2.1 Aktivní stabilizace břemene proti kývání iCM.....	13
2.2.2 Systém ASLC	13
2.2.3 Systém Anti-Sway (Sensorless)	14
2.2.4 Zařízení pro potlačení kývání břemene společnosti AISE.....	15
2.2.5 Systémy omezující kývání břemene portálových jeřábů.....	16
2.3 MATEMATICKÝ POPIS KÝVÁNÍ BŘEMENE.....	17
2.3.1 Břemeno jako matematické kyvadlo	17
2.3.2 Kývání břemene při rozjezdu jeřábové kočky	19
3 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE	21
4 ZPŘESNĚNÍ MATEMATICKÉHO POPISU	22
4.1 NOVÝ MATEMATICKÝ POPIS POHYBU KOČKY S BŘEMENEM.....	23
4.2 SESTAVENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC.....	25
4.2.1 Lagrangeovy rovnice II. druhu	25
4.2.2 Kinetická energie systému.....	26
4.2.3 Potenciální energie systému.....	27
4.2.4 Kinetický potenciál	28
4.2.5 Výpočet derivací	28
4.2.6 Sestavení vlastních pohybových rovnic	30
4.3 VYŘEŠENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC	31
4.3.1 Zavedení zjednodušujících konstant.....	32
4.3.2 Dílčí matematické úpravy.....	33
4.3.3 Maticový zápis.....	35
4.3.4 Úprava na Cramerovo pravidlo	36
4.3.5 Vyřešení souřadnice x.....	38
4.3.6 Rekapitulace získaných výsledných vztahů.....	45
4.4 APROXIMOVANÉ ŘEŠENÍ V PROSTŘEDÍ MS EXCEL	47
4.5 STANOVENÍ ZRYCHLENÍ JEŘÁBOVÉ KOČKY PRO ÚČELY ŘÍZENÍ ROZBĚHU.....	48
4.6 NUMERICKÉ ŘEŠENÍ.....	49
4.7 SROVNÁNÍ APROXIMOVANÉHO A NUMERICKÉHO ŘEŠENÍ	50
4.8 TEORETICKÉ VÝSLEDKY DLE NOVĚ PŘIJATÉHO MATEMATICKÉHO POPISU	51
4.8.1 Volba břemene č. 1.....	51
4.8.2 Teoretické výsledky pro kmitání břemene č. 1, analýza výsledků	54
4.8.3 Volba břemene č. 2.....	58
4.8.4 Teoretické výsledky pro kmitání břemene č. 2, analýza výsledků	60
4.8.5 Porovnání kmitání válcového břemene pro různé délky závěsu.....	64
4.8.6 Teoretické výsledky srovnání kmitání břemene s různou délkou závěsu.....	65

5 STAVBA MĚŘICÍHO PRACOVISTĚ	69
5.1 NÁVRH MĚŘICÍHO PRACOVISTĚ	69
5.1.1 Podmínky a omezení ovlivňující umístění měřicího pracoviště	69
5.1.2 Podmínky a omezení ovlivňující návrh ocelové konstrukce	71
5.1.3 Volba jeřábové kočky	72
5.1.4 Návrh ocelové konstrukce	74
5.1.5 Výpočet ocelové konstrukce pomocí MKP	78
5.1.6 Posouzení hlavního nosníku na druhý mezní stav	80
5.1.7 Vizualizace navržené ocelové konstrukce měřicího pracoviště	81
5.2 STATICKÝ VÝPOČET NOSNÉ OCELOVÉ KONSTRUKCE MĚŘICÍHO PRACOVISTĚ	81
5.3 SESTAVENÍ NOSNÉ OCELOVÉ KONSTRUKCE MĚŘICÍHO PRACOVISTĚ	82
5.3.1 Montáž nosné ocelové konstrukce a jeřábové kočky	82
5.3.2 Měřicí pracoviště	84
5.4 ZAJIŠTĚNÍ MĚŘENÍ	85
5.4.1 Senzory zrychlení	85
5.4.2 Volba měřicí aparatury	86
5.4.3 Umístění akcelerometrů	87
6 VLASTNÍ MĚŘENÍ A VERIFIKACE ZVOLENÉ TEORIE	89
6.1 PROVEDENÍ MĚŘENÍ ZRYCHLENÍ PRO BŘEMENO Č. 1	89
6.1.1 Základní informace o realizovaném měření	89
6.1.2 Naměřená data pro břemeno č. 1	91
6.1.3 Explorační analýza naměřených dat pro břemeno č. 1	93
6.2 PROVEDENÍ MĚŘENÍ ZRYCHLENÍ PRO BŘEMENO Č. 2	99
6.2.1 Základní informace o realizovaném měření	99
6.2.2 Naměřená data pro břemeno č. 2	100
6.2.3 Explorační analýza naměřených dat pro břemeno č. 2	102
6.3 PROVEDENÍ MĚŘENÍ ZRYCHLENÍ BŘEMENE Č. 2 S DELŠÍM ZÁVĚSEM	108
6.3.1 Základní informace o realizovaném měření	108
6.3.2 Naměřená data pro břemeno č. 2 s delším závěsem	109
6.3.3 Explorační analýza naměřených dat - břemeno č. 2 s dlouhým závěsem	111
6.4 SROVNÁNÍ NAMĚŘENÝCH HODNOT ZRYCHLENÍ S HODNOTAMI TEORETICKÝMI	117
6.5 ZÁVĚRY VYPLÝVAJÍCÍ Z PROVEDENÝCH MĚŘENÍ	118
7. ZÁVĚR	121
7.1 PŘÍNOS DISERTAČNÍ PRÁCE	122
7.2 DOPORUČENÍ PRO DALŠÍ POSTUP VE VÝVOJI A REALIZACI	123
SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	126
PUBLIKACE AUTORA	129

Seznam použitého značení

A	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[kg]
A_r	Integrační konstanta	[-]
B	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[kg.m]
B_r	Integrační konstanta	[-]
C	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[kg.m]
D	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[N]
E	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[m]
E_x	Yongův modul	[Pa]
F	Zjednodušující konstanta sdružující vstupní veličiny	[-]
F_{ip}	Inerční síla od posuvných hmot působící na obvodu pojezdového kola	[N]
F_{mot}	Tažná síla motoru na pojezdovém kole jeřábové kočky	[N]
F_t	Pojezdový odpor	[N]
F_T	Tečná složka tíhové síly břemene	[N]
I_M	Hmotový moment setrvačnosti motoru včetně rotujících částí redukovaných na hřídel elektromotoru	[kg.m ²]
I_x	Minimální plošný moment setrvačnosti hlavního nosníku	[m ⁴]
I_{x220}	Plošný moment setrvačnosti hlavního nosníku	[m ⁴]
I_3	Moment setrvačnosti pojezdového kola kočky	[kg.m ²]
I_{4S}	Moment setrvačnosti břemene k těžišti břemene	[kg.m ²]
I_{4Sk}	Moment setrvačnosti břemene - kvádru k těžišti břemene	[kg.m ²]
I_{4Sv}	Moment setrvačnosti válcového břemene k těžišti břemene	[kg.m ²]
L	Délka lanového závěsu (pouze v kap. 2.3.2)	[m]
L	Rozpětí hlavního nosníku	[m]
M	Záběrový moment elektromotoru pojezdu jeřábové kočky	[N.m]
M_{krit}	Kritická hodnota záběrového momentu elektromotoru	[N.m]
M_m	Skutečný krouticí moment	[N.m]
M_{st}	Moment pasivních odporů	[N.m]
M_{ip}	Inerční moment posuvných hmot	[N.m]
M_{ir}	Inerční moment rotačních hmot	[N.m]
Q	Jmenovitá hmotnost břemene	[kg]
R_d	Výpočtová pevnost oceli	[MPa]
S	Síla v laně	[N]
T_k	Časová konstanta	[s]
T_1	Časová konstanta	[s]
T_2	Časová konstanta	[s]
W	Kinetický potenciál	[J]

W_k	Kinetická energie systému	[J]
W_p	Potenciální energie systému	[J]
W_t	Pojezdový odpor	[N]
a	Zrychlení břemene v gravitačním silovém poli	[m.s ⁻²]
a_{mp}	Amplituda rozkmitaného jeřábového mostu	[mm]
c_0	Tuhost hlavního nosníku	[N.mm ⁻¹]
e	Osová vzdálenost pojezdových kol jeřábové kočky	[m]
e_t	Rameno valivého tření	[m]
f	Frekvence vlastního kmitání mostu	[s ⁻¹]
f_{ξ}	Součinitel čepového tření	[-]
g	Tíhové zrychlení	[m.s ⁻²]
h_s	Výška stropu v laboratoři	[m]
i	Převodový poměr mezi elektromotorem a pojezdovými koly kočky	[-]
l	Délka odvinutého lana (délka lanového závěsu)	[m]
m	Hmotnost břemene	[kg]
m_B	Hmotnost břemene	[kg]
m_j	Hmotnost jeřábové kočky	[kg]
m_k	Hmotnost elektrického lanového kladkostroje	[kg]
m_n	Délková hmotnost hlavního nosníku	[kg/m]
m_{red}	Redukovaná hmotnost nosníku a kočky	[kg]
m_2	Hmotnost jeřábové kočky	[kg]
m_4	Hmotnost zavěšeného břemene	[kg]
m_{4k}	Hmotnost břemene - kvádru	[kg]
m_{4v}	Hmotnost válcového břemene	[kg]
n_M	Jmenovité otáčky elektromotoru pojezdu	[min ⁻¹]
p	Reálné číslo	[-]
$p_{1,2}$	Kořeny kvadratické rovnice	[-]
r	Poloměr pojezdových kol jeřábové kočky	[m]
r_{ξ}	Poloměr čepu pojezdového kola jeřábové kočky	[m]
r_S	Vzdálenost mezi jeřábovým hákem a těžištěm břemene	[m]
r_{S1}	Vzdálenost mezi jeřábovým hákem a těžištěm břemene č. 2 s krátkým závěsem	[m]
r_{S2}	Vzdálenost mezi jeřábovým hákem a těžištěm břemene č. 2 s delším závěsem	[m]
r_v	Poloměr válcového břemene	[m]
t	Čas	[s]
Δt	Časový interval	[s]
t_{max}	Horní hranice časového intervalu	[s]

t_r	Doba rozběhu elektromotoru pojezdu jeřábové kočky	[s]
t_{t1}	Doba poklesu amplitudy rozkmitaného jeřábového mostu	[s]
u_0	Funkce proměnných φ a ψ	[m ²]
u_{11}	Funkce proměnných φ a ψ	[m ²]
u_{12}	Funkce proměnných φ a ψ	[m ²]
u_{21}	Funkce proměnných φ a ψ	[m ²]
u_{22}	Funkce proměnných φ a ψ	[m ²]
v	Obvodová rychlost břemene v gravitačním silovém poli	[m.s ⁻¹]
v_I	Funkce proměnných φ a ψ	[m ² .s ⁻²]
v_2	Funkce proměnných φ a ψ	[m ² .s ⁻²]
w	Výška válcového břemene	[m]
w_1	Délka zvoleného břemene	[m]
w_2	Šířka zvoleného břemene	[m]
w_3	Výška zvoleného břemene	[m]
x	Zobecněná souřadnice - vychýlení jeřábové kočky	[m]
\dot{x}	Okamžitá rychlost jeřábové kočky	[m.s ⁻¹]
\ddot{x}	Okamžité zrychlení jeřábové kočky	[m.s ⁻²]
x_B	Vychýlení břemene ve vodorovném směru	[m]
\dot{x}_B	Okamžitá rychlost břemene ve vodorovném směru	[m.s ⁻¹]
\ddot{x}_B	Okamžité zrychlení břemene ve vodorovném směru	[m.s ⁻²]
x_j	Vychýlení jeřábové kočky ve vodorovném směru	[m]
\dot{x}_j	Okamžitá rychlost jeřábové kočky	[m.s ⁻¹]
\ddot{x}_j	Okamžité zrychlení jeřábové kočky	[m.s ⁻²]
\ddot{x}_{krit}	Kritická hodnota zrychlení jeřábové kočky při rozběhu	[m.s ⁻²]
\ddot{x}_{max}	Maximální zrychlení jeřábové kočky s ohledem na zvolené úhly vychýlení	[m.s ⁻²]
x_v	Rychlost jeřábové kočky	[m.s ⁻¹]
x_{v0}	Odhad rychlosti	[m.s ⁻¹]
x_{vI}	Odhad rychlosti	[m.s ⁻¹]
x_0	Odhad výchylky	[m]
x_1	Odhad výchylky	[m]
y_{ST}	Statický průhyb od jmenovitého břemene	[mm]
y_Z	Svislá vzdálenost mez těžištěm břemene a počátkem souřadnic. systému	[m]
\dot{y}_Z	Okamžitá rychlost břemene ve svislém směru	[m.s ⁻¹]
\ddot{y}_Z	Okamžité zrychlení břemene ve svislém směru	[m.s ⁻²]

α	Úhel sklonu drážkovaného lanového bubnu	[deg]
β_L	Náběhový úhel lana na drážkovaný lanový buben (levá strana)	[deg]
β_P	Náběhový úhel lana na drážkovaný lanový buben (pravá strana)	[deg]
ε	Úhlové zrychlení břemene	[rad.s ⁻²]
ε_M	Úhlové zrychlení hřídele elektromotoru	[rad.s ⁻²]
η_C	Účinnost převodového ústrojí jeřábové kočky	[-]
φ	Úhel vychýlení lanového závěsu (jeřábového háku)	[deg]
$\dot{\varphi}$	Okamžitá rychlost konce lana (jeřábové kladnice)	[m.s ⁻¹]
$\ddot{\varphi}$	Okamžité zrychlení konce lana (jeřábové kladnice)	[m.s ⁻²]
φ_{dov}	Úhel dovoleného vychýlení lanového závěsu (jeřábové kladnice)	[deg]
φ_{max}	Úhel maximálního vychýlení lanového závěsu (jeřábového kladnice)	[deg]
ν	Logaritmický dekrement útlumu kmitání	[-]
ψ	Úhel vychýlení těžiště břemene	[deg]
$\dot{\psi}$	Okamžitá rychlost těžiště břemene	[m.s ⁻¹]
$\ddot{\psi}$	Okamžité zrychlení těžiště břemene	[m.s ⁻²]
ψ_{dov}	Úhel dovoleného vychýlení těžiště břemene	[deg]
ψ_{max}	Úhel maximálního vychýlení těžiště břemene	[deg]
Ω	Kruhová frekvence vlastního netlumeného kmitání	[rad.s ⁻¹]
ω_M	Úhlová rychlost hřídele elektromotoru	[rad.s ⁻¹]

1 ÚVOD

Manipulace s materiálem je každodenní součástí života člověka. Zasahuje do většiny lidských činností a přesto, že je téměř všudypřítomná, často nebývá ani vnímána. Je považována jaksi za samozřejmou.

Manipulací s materiálem se rozumí jakákoli činnost, při které je materiál plynule, či přerušovaně, přepravován ve svislém nebo vodorovném směru a to ručně nebo pomocí zdvihadel či jeřábů.

V souvislosti s neustále zrychlujícím se tempem životního stylu rostou taktéž nároky na přepravní prostředky a manipulaci s materiálem.

Mostové jeřáby, které v uplynulých letech zaznamenaly obrovský rozmach zejména díky rozvoji elektroniky, jsou vystavovány požadavkům dlouhé životnosti, provozní spolehlivosti a zároveň vysoké efektivnosti.

Nicméně, jedním z hlavních požadavků, jež jsou kladeny na mostové jeřáby, je rychlý rozjezd a dojezd jeřábu, o vysokých rychlostech pojezdu jeřábu ani nemluvě. A právě rychlý rozjezd jeřábu, resp. vysoká hodnota zrychlení pohonu jeřábu je faktorem, který sice pozitivně ovlivní dopravní výkon jeřábu, na druhou stranu však často negativně ovlivňuje životnost lanového systému jeřábové kočky, jak bude podrobně vysvětleno v následující kapitole. Tímto způsobem tedy nelze dosáhnout vysoké efektivnosti jeřábu.

Je-li tedy v praxi požadováno, aby mostový jeřáb pracoval co nejefektivněji, je zapotřebí vhodným způsobem synchronizovat rozjezd mostového jeřábu s životností lanového systému.

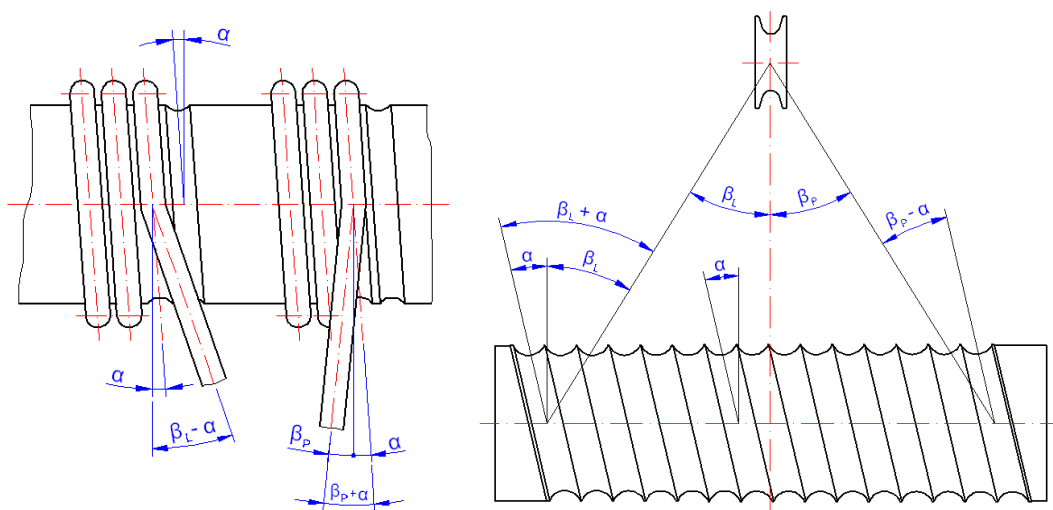
Jednomu z možných způsobů zvýšení efektivnosti provozování mostového jeřábu – rozjezdu mostového jeřábu s ohledem na kývání břemene, je věnována tato disertační práce.

1.1 Definice problému

Při výkyvu břemene, ve svislé rovině, zavěšeném na jeřábovém háku dochází k mírnému vychýlení břemene ve svislém směru a tím k nárůstu mechanické, potenciální energie břemene, která je nejvyšší v krajních polohách, stejně jako zrychlení břemene. Při šikmé poloze zdvihového lana dochází ke vzniku vodorovné silové složky urychlující břemeno ve směru pojezdu. V případě brzdění a tím pádem opačného výkyvu dochází ke zpoždování břemene. Rovněž dochází k přitížení, resp. odlehčení příslušné strany pojezdového zařízení, [1].

Výkyv břemene nabývá největších hodnot při rozjezdu kočky, poněvadž kočka dosahuje vyšších pojezdových rychlostí než samotný mostový jeřáb. Rozjezd je komplikovanější než brzdění, poněvadž hnací síla není hned zpočátku konstantní, což rovněž nepříznivě ovlivňuje kývání břemene.

Kývání břemene je u běžných a procesních jeřábů nepříznivé zejména z důvodu náběhu lana na drážkovaný lanový buben. Při nadměrném výkyvu může dojít k nežádoucímu a nepříznivému smýkání lana vůči okraji lanové drážky či otírání se o sousední závit lana.



Zdroj: Autor dle [1], [2]

Obr. 1.1 Problematika náběhu lana na drážkovaný buben dvou různých provedení

Zdvihové ocelové lano, které je navíjeno, resp. odvíjeno z drážkovaného lanového bubnu o úhlu sklonu drážek α [deg], resp. lano, které je vedeno přes kladky pod určitým úhlem náběhu (β_L [deg] nebo β_P [deg]), se bude zkrucovat odvalováním dolů po boku žlábků v drážce na lanovém bubnu či v kladce, viz obr. 1.1.

Touto nežádoucí činností se mění stoupání vinutí zdvihového lana, což vede k nepříznivému únavovému zatěžování a nevhodnému navíjení, čímž se snižuje únosnost lana. V krajním případě může dojít až k poruchám konstrukce lana [2].

Z těchto důvodů je kladen požadavek na co možná nejnížší náběhové úhly. Dle [2] by náběhové úhly v lanových systémech neměly nabývat hodnot větších než 4 deg, resp. 2 deg u lan netočivých. Navíjí-li se lano na buben ve více vrstvách, což je typické pro jeřáby s vysokou hodnotou výšky zdvihu, je požadováno, aby náběhový úhel u přírub nepřesáhl hodnotu 0,5 deg a nedocházelo tak k nahromadění lana.

Konstrukční řešení snížení úhlu náběhu může být realizováno:

- zmenšením délky bubnu, popř. zvětšením průměru bubnu,
- zvýšením osové vzdálenosti mezi bubny a kladkami,
- přesným řízením rozběhu jeřábu \Rightarrow **omezením kývání břemene.**

Omezením kývání břemene je dosaženo nejen vyšší životnosti lan a lanových bubnů, nýbrž i časové úspory, neboť při větším rozkmitu je často nutné pohon zastavit až do uklidnění kývání břemene. Je zřejmé, že zatímco se doba manipulace s břemenem prodlužuje, efektivita práce klesá a to i přesto, že nároky na kvalifikovanou obsluhu jsou naopak vyšší, o vyšší spotřebě elektrické energie ani nemluvě.

2 POPIS SOUČASNÉHO STAVU

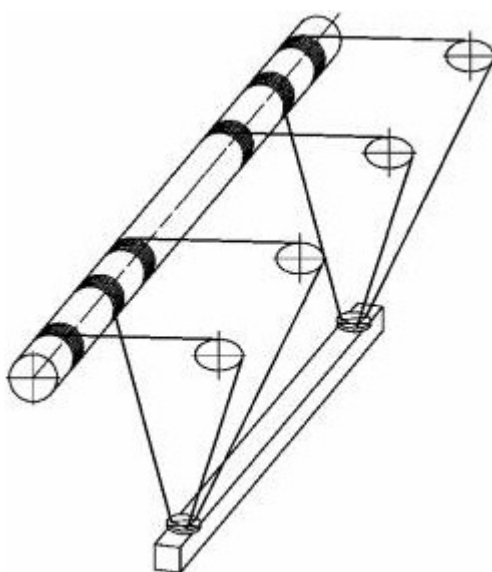
V současné době je na evropském trhu známo několik způsobů (principů), které více či méně úspěšně potlačují kývání břemene. Popisy činností těchto systémů budou blíže vysvětleny v následujících podkapitolách.

2.1 Mechanická stabilizace břemene

2.1.1 Mechanická modifikace jeřábu se speciálním uspořádáním nosných lan

Jak již z názvu vyplývá, jedná se o mechanický způsob pro eliminaci, resp. snížení nežádoucího kývání břemene, využívající specifického uspořádání nosných lan. Toto konstrukční řešení je velmi účinné při nižších délkách zavěšení břemene (délky odvinutého lana) a je využíváno zejména při manipulaci s dlouhým kusovým materiálem (např. ocelové tyče na obr. 2.3), kdy je uložení tohoto břemene, např. do stromečkového regálu, mnohem jednodušší a hlavně rychlejší. Slabinou tohoto systému je účinnost při větší délce zavěšení břemene.

Na obr. 2.1 je uvedeno schéma speciálního uspořádání lan, nazývaného Schrägseilstabilisierung 6/6, zabráňujícího rozkývání traverzy s elektromagnety nesoucími např. dlouhé ocelové tyče. Detail tohoto konstrukčního řešení – viz obr. 2.2.



Zdroj: [17]

Obr. 2.1 Schéma specifického uspořádání nosných lan Schrägseilstabilisierung 6/6



Zdroj: [17]

Obr. 2.2 Detail navíjení a vedení nosných lan systému Schrägseilstabilisierung 6/6



Zdroj: [17]

Obr. 2.3 Dvounosíkový mostový jeřáb s otočnou jeřábovou kočkou se dvěma traverzami se specifickým uspořádáním nosných lan Schrägseilstabilisierung 6/6

O poměrné jednoduchosti, avšak vysoké funkčnosti a účinnosti tohoto patentovaného konstrukčního řešení se přesvědčil rovněž autor této práce, když viděl jeřáb se zmíněným systémem při manipulaci s dlouhým kusovým materiálem.

Z českých výrobců mostových jeřábů nabízí lanovou stabilizaci např. brněnská společnost ITECO s.r.o.

2.1.2. Stabilizace břemene mechanickým tubusem

Tato varianta mechanické stabilizace břemene je velmi účinná, zároveň však poměrně drahá z důvodu vyšší složitosti konstrukčního provedení.

Jak již z názvu vyplývá, hlavním prvkem stabilizace břemene je mechanický tubus, zpravidla v teleskopickém provedení. Jeřáb s mechanickým tubusem často pracuje jako jeřáb stohovací.

U tohoto systému je sporadické, zdali se ještě jedná o systém potlačující kývání břemene, nebo již lze takové zařízení nazvat uchopovacím a manipulačním prostředkem, jak ukazuje obr. 2.4. Nicméně, vzhledem k tomu, že mechanický tubus (někdy též zkráceně označován jako „teleskop“) nahradil lanování právě kvůli kývání břemene, je tento systém pro účely této práce zařazen mezi systémy stabilizující břemeno.



Zdroj: [17]

Obr. 2.4 Mostový jeřáb se skládacím teleskopem eliminujícím kývání břemene

Mostové jeřáby vybavené popsaným zařízením lze v různých modifikacích spatřit zejména v hutních provozech, neboť jak uvádí [1], kývání břemene je v oboru hutních jeřábů nepřípustné.

2.2 Elektronická stabilizace břemene

2.2.1 Aktivní stabilizace břemene proti kývání iCM

Základem tohoto systému společnosti SCS servis, spol. s r. o. [18] je senzor snímající s vysokou přesností absolutní polohu břemene vůči zemi, dále snímá jeho zrychlení a předvídá jeho další pohyb. Signály z tohoto senzoru jsou digitalizovány a řídicí počítač vyhodnocuje přesnou polohu břemene a jeho pohyby – kývání. Počítač po vyhodnocení těchto údajů řídí frekvenční měniče pohonů mostu a kočky tak, aby došlo k eliminaci kývání břemene.

Systém stabilizace iCM nevyžaduje snímání délky lana a dle podkladů výrobce zcela vylučuje šikmý tah břemene.

Systém pracuje zcela automaticky na základě pokynů obsluhy prostřednictvím dálkového ovládání.

2.2.2 Systém ASLC

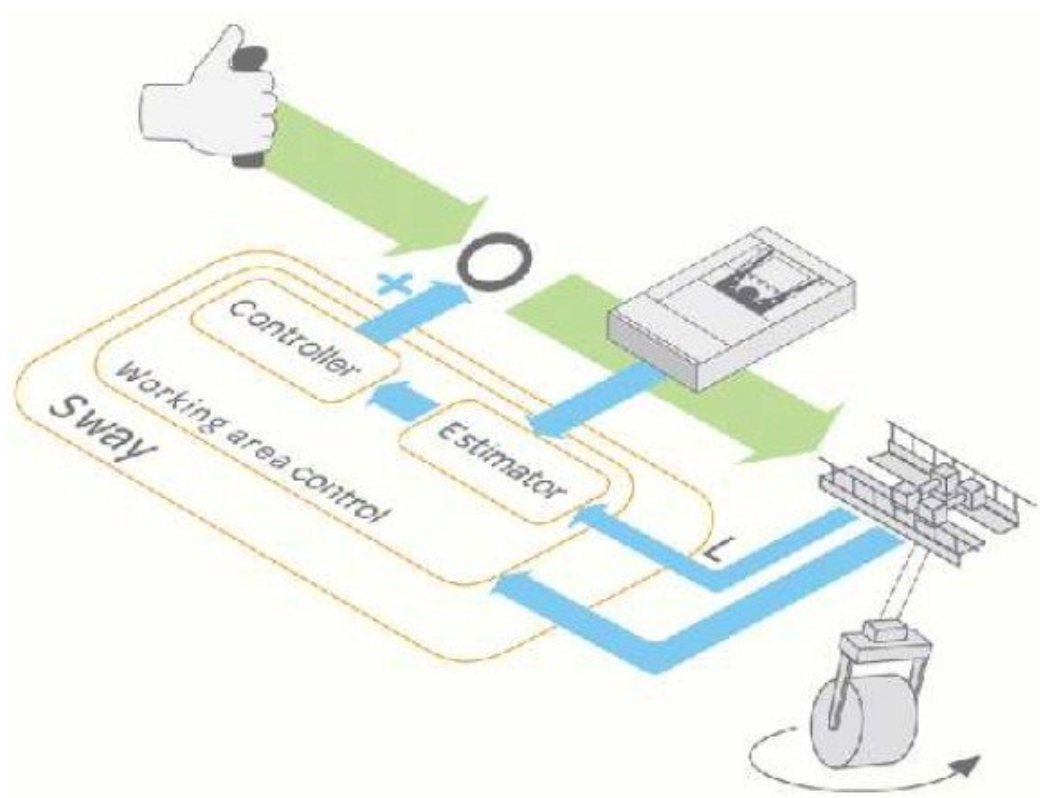
Tento systém německé společnosti Hetronic Germany GmbH [19] byl původně vyvinut pro mostové jeřáby manipulující se svitky drátů a pod jeho zkratkou ASLC (Anti Swing Load Control) se ukrývají vhodným způsobem řízené pohony prostřednictvím frekvenčních měničů.

V České republice je tento systém dodáván na přání zákazníka spolu s dálkovým rádiovým ovládáním a tudíž stejně jako v předchozím případě pracuje zcela samočinně.

2.2.3 Systém Anti-Sway (Sensorless)

Tento systém od francouzské společnosti Schneider Electric pracuje na podobném principu jako systém ASLC zmíněný výše.

Jak již z názvu vyplývá, jedná se o systém, který ke své funkci nepotřebuje informace ze snímačů (např. snímače délky odvinutého lana, apod.) a celá jeho funkce je zabezpečována prostřednictvím rádiového dálkového ovládání, ve kterém je ukryt program, který odhaduje následné možné pohyby kočky a mostu a vhodným způsobem řídí frekvenční měniče příslušných pohonů.



Zdroj: [20]

Obr. 2.5 Blokové schéma systému Anti-Sway (Sensorless)

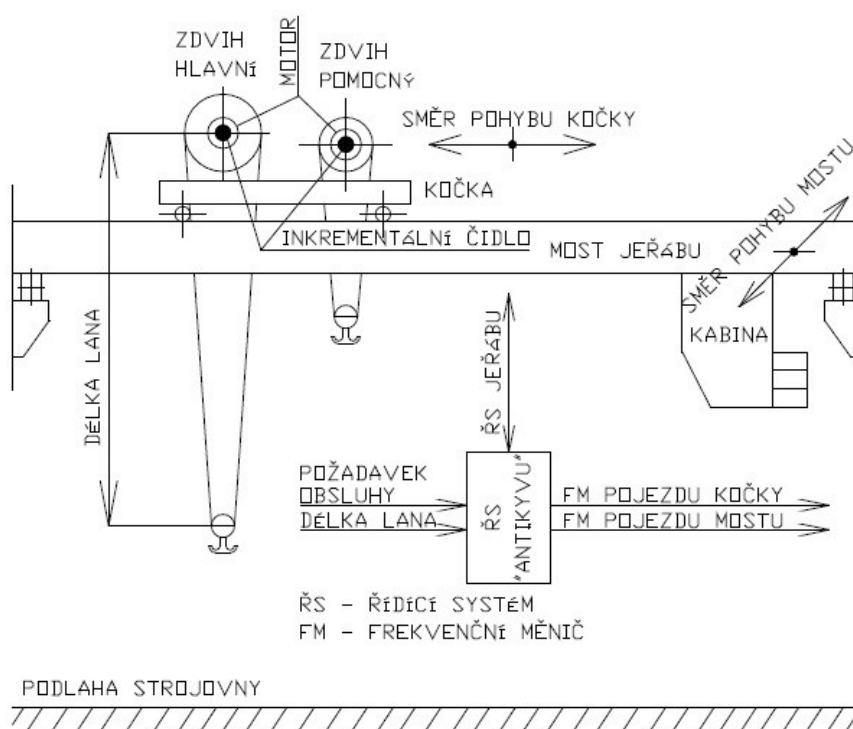
Systém Anti-Sway (Sensorless) je nabízen na tuzemském trhu společností Schneider Electric CZ, s.r.o., která je pobočkou této celosvětově působící společnosti.

2.2.4 Zařízení pro potlačení kývání břemene společnosti AISE

Tento systém se skládá z řídicího počítače a čidla (indukčního, inkrementálního) odměřujícího délku odvinutého lana.

Řídicí počítač snímá signály požadavků obsluhy na pojezd kočky, jeřábového mostu a délku odvinutého lana. Na základě těchto údajů generuje počítač takovou rozjezdovou a dojezdovou rampu, při které nedochází k rozkývání břemene. Tento signál je pak vstupním signálem pro vektorově řízené frekvenční měniče příslušných pohonů. Vzhledem k tomu, že jsou snímány pohyby jak kočky, tak mostu, je zajištěna eliminace kývání břemene pro oba směry.

Tento systém využívá (v současné době již zaniklého) patentu PV 3661/96 prof. Ing. Michaela Valáška, DrSc. z ČVUT Praha a na základě licence jej instaluje a na trh dodává obchodní společnost AISE, s.r.o. ze Zlína jako výhradní dodavatel tohoto systému, [21].



Zdroj: [22]

Obr. 2.6 Blokové schéma zařízení pro potlačení kývání břemene

Eliminace kývání břemene byla v tomto případě řešena jako matematické kyvadlo, tj. systém s jedním stupněm volnosti. Vzhledem k tomu, že výkyv je právě (dle této teorie) funkcí délky odvinutého lana, je účinnost zmiňovaného systému velmi vysoká a dodavatel tohoto systému uvádí zvýšení produktivity práce o 20%.

2.2.5 Systémy omezující kývání břemene portálových jeřábů

Na portálových jeřábech pracujících v obřích kontejnerových překladištích jsou, vzhledem k vysoké požadované produktivitě práce, instalovány nejmodernější systémy jednak pro přesné polohování břemene, jednak pro eliminaci jeho kývání. Každý ušetřený časový okamžik znamená vyšší přepravní výkon a tudíž i zvýšení zisku.

Není proto divu, že vývoj systémů využívající nejmodernější technologie je zacílen a aplikován právě na obří portálové jeřáby.

Těmito moderními, progresivními systémy využívající neuronové sítě se zabývá holandský výzkumný kolektiv pod vedením van der Booma [3].

Jiný přístup k řešení problému kývajícího se břemene představuje systém využívající obrazové snímáče (CCD kamery) vyvíjený Japonsko-Korejským týmem v roce 2009 [4]. Systém byl experimentálně ověřen.

Zřejmě nejpoužívanějšími expertními systémy používanými pro efektivní řízení jak mostových, tak kontejnerových jeřábů, jsou systémy řízení pohonů pomocí fuzzy logiky. Využití fuzzy logiky k řízení mostového jeřábu potlačující kývání břemene se věnuje, mimo jiné, Dr. Mahfouf s vědeckým kolektivem z univerzity v Sheffieldu [5].

Výše uvedené systémy jsou však z finančního hlediska velmi nákladné. Je tedy pravděpodobné, že ačkoli tyto systémy spolehlivě a účinně pracují, v oboru mostových jeřábů nejsou v současné rentabilní, tudíž je nutné hledat možnosti eliminace kývání břemene pomocí jednodušších způsobů a prostředků.

Jedním z těchto prostředků může být zpřesnění předpokladů popisujících kmitání reálného břemene – např. pomocí matematického popisu s více stupni volnosti, jak bude blíže vysvětleno v následující kapitole.

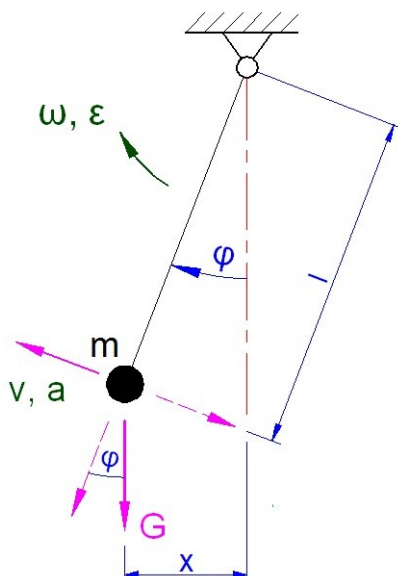
2.3 Matematický popis kývání břemene

Naprostá většina zde zmíněných systémů je založena na teorii (matematickém popisu) kývání břemene, které se více či méně přesně přibližují reálné situaci, resp. břemenu kmitajícím na zavěšeném laně (či háku) reálné jeřábové kočky.

Jelikož v naprosté většině případů nelze matematicky popsat skutečnou situaci, je hledán jakýsi kompromis mezi dostatečně přesným přiblížením se realitě a zároveň co možná největší jednoduchostí systému. A právě v této části lze nalézt poměrně velké rozdíly v přístupu k popisu fyzikálního jevu nazývaného kývání břemene.

2.3.1 Břemeno jako matematické kyvadlo

Břemeno, v tomto případě hmotný bod o hmotnosti m [kg] zavěšený na nehmotném laně délky l [m] konající rovinný kývavý pohyb v gravitačním silovém poli, je v odborné literatuře nazýváno matematickým kyvadlem.



Zdroj: Autor dle [6]

Obr. 2.7 Mechanický model kmitajícího břemene

Tento systém s jedním stupněm volnosti představuje zdánlivě jednoduchý fyzikální problém dynamiky hmotného bodu, konkrétně kmitavého pohybu. Přesto lze zejména díky známé délce lana velmi dobře matematicky popsat reálné kmitající břemeno a na základě této teorie je založeno funkční a již několik let provozované zařízení potlačující kývání břemene společnosti AISE zmíněné v kap. 2.2.4, jak je uvedeno v [22].

Rozložíme-li tíhovou sílu G [N] do směru závěsu (lana) a do směru pohybu hmotného bodu, získáváme:

$$m \cdot a = -G \cdot \sin \varphi \quad (2.1)$$

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2.2)$$

$$l \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \sin \varphi = 0 \quad (2.3)$$

Výše uvedený vztah (2.3) představuje nelineární diferenciální rovnici druhého řádu. Pro velmi malý úhel φ [deg] ji však lze linearizovat:

$$\sin \varphi \cong \varphi \quad (2.4)$$

Dostáváme pohybovou rovnici ve tvaru:

$$l \cdot \ddot{\varphi} + g \cdot \varphi = 0 \quad (2.5)$$

což je rovnice formálně shodná s pohybovou rovnicí vlastního netlumeného kmitání. Řešení kývavého pohybu matematického kyvadla má pak tvar:

$$\varphi = A_r \cdot \cos(\Omega \cdot t) + B_r \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad (2.6)$$

kde: Ω [rad.s⁻¹] ... kruhová frekvence vlastního netlumeného kmitání,

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.7)$$

A_r [-] – integrační konstanta, z počátečních podmínek $A_r = \varphi_0$

$$B_r [-] – \text{integrační konstanta, z počátečních podmínek } B_r = \frac{\omega_0}{\Omega} \quad (2.8)$$

Je zřejmé, že výchylka břemene, resp. amplituda kmitání se zvětšuje společně s nárůstem délky lana, což potvrzuje logickou úvahu vzhledem ke svázanosti délky lana l [m] a úhlu vychýlení břemene φ [deg].

Na základě teorie kmitání břemene lze sestavit jistý model chování břemene, prostřednictvím kterého bude počítač zpětnovazebně řídit frekvenční měniče jednotlivých pohonů.

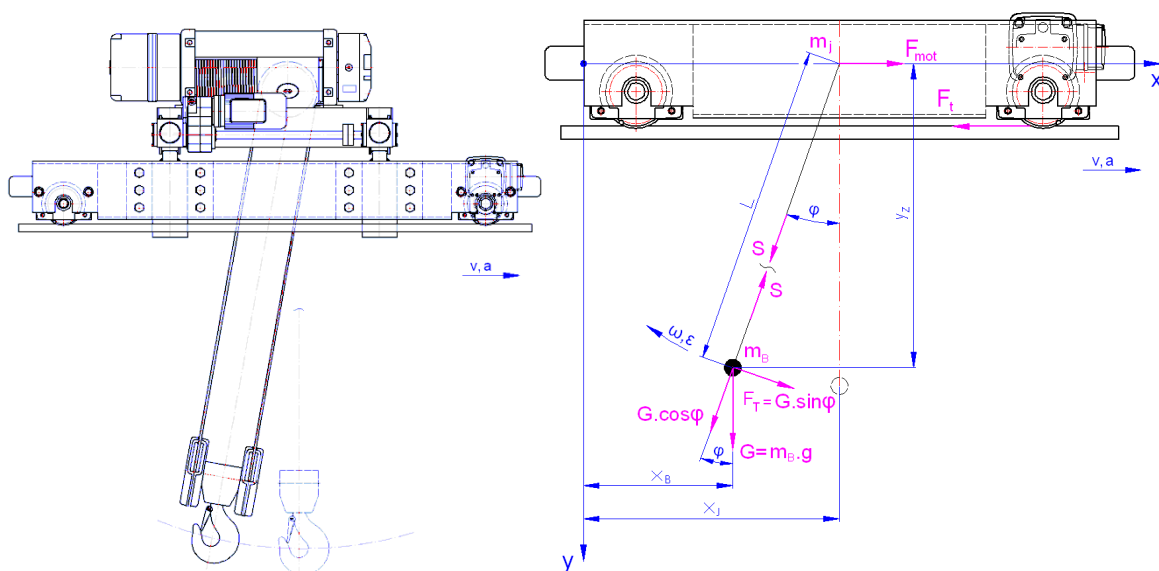
V tomto případě však neexistuje přímá vazba mezi pohybem kočky a pohybem břemene, jinými slovy, tyto pohyby nejsou „matematicky svázány.“

2.3.2 Kývání břemene při rozjezdu jeřábové kočky

Uvažujeme-li o rozběhu jeřábové kočky, resp. mostového jeřábu (a tudíž i o kývání břemene) za předpokladu, že kromě hmotnosti břemene a délky odvinutého lana známe navíc i krouticí moment motoru, je namístě úvaha o „svázání“ těchto veličin.

Jinými slovy, abychom na základě znalosti jmenovaných veličin nemuseli simulovat následné pohyby jeřábové kočky k zamezení kývání břemene pouze na základě určitých odhadů či přibližných řešení.

Jednou z možností vytvoření vazby mezi pohybem kočky a pohybem břemene je zavedení dalšího stupně volnosti – a to translačního pohybu kočky, jak ukazuje obr. 2.8.



Zdroj: Autor dle [7]

Obr. 2.8 Kývání břemene při rozjezdu mostového jeřábu (zjednodušený model, bez měřítka)

Dle obr. 2.8 je možno sestavit pohybové rovnice ve tvaru:

- pohybová rovnice jeřábové kočky:

$$m_j \cdot \ddot{x}_j = F_{mot} - F_t - S \cdot \sin \varphi \quad (2.9)$$

- pohybová rovnice břemene ve směru osy x :

$$m_B \cdot \ddot{x}_B = S \cdot \sin \varphi - F_T \cdot \cos \varphi \quad (2.10)$$

- pohybová rovnice břemene ve směru osy y :

$$m_B \cdot \ddot{y}_Z = m_B \cdot g - S \cdot \cos \varphi - F_T \cdot \sin \varphi \quad (2.11)$$

Dílčí vztahy pro vychýlení břemene:

$$x_B = x_J - L \cdot \sin \varphi \quad (2.12)$$

$$y_Z = L \cdot \cos \varphi \quad (2.13)$$

Dílčí vztahy (2.12) a (2.13) po první a druhé derivaci:

$$\dot{x}_B = \dot{x}_J - L \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{a} \quad \ddot{x}_B = \ddot{x}_J + L \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - L \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} \quad (2.14)$$

$$\dot{y}_Z = -L \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \text{a} \quad \ddot{y}_Z = -L \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - L \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} \quad (2.15)$$

Dosazením dílčích vztahů po druhé derivaci (2.14) a (2.15) do vztahů (2.10) a (2.11) dostáváme:

$$m_B \cdot (\ddot{x}_J + L \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - L \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = S \cdot \sin \varphi - F_T \cdot \cos \varphi \quad (2.16)$$

$$m_B \cdot (-L \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 - L \cdot \sin \varphi \cdot \ddot{\varphi}) = m_B \cdot g - S \cdot \cos \varphi - F_T \cdot \sin \varphi \quad (2.17)$$

Výše uvedené pohybové rovnice břemene (2.16) a (2.17) jsou upraveny tak, aby vyjádřily $\ddot{\varphi}$ a \ddot{x}_J .

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{mot} \cdot \cos \varphi - F_T \cdot \cos^2 \varphi - F_t \cdot \cos \varphi - m_B \cdot L \cdot \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + (m_B + m_j) \cdot \frac{F_T}{m_B}}{L \cdot (m_B + m_j) - m_B \cdot L \cdot \cos^2 \varphi} - \frac{(m_B + m_j) \cdot g \cdot \sin \varphi}{L \cdot (m_B + m_j) - m_B \cdot L \cdot \cos^2 \varphi} \quad (2.18)$$

$$\ddot{x}_J = \frac{F_{mot} - F_t - m_B \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - m_B \cdot L \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2}{m_j + m_B \cdot (1 - \cos^2 \varphi)} \quad (2.19)$$

Jedná se o nelineární diferenciální rovnice druhého řádu. Rovnice však lze linearizovat aplikací vztahů platných pro malé úhly. Např. v [6] se uvádí, že při linearizaci $\sin \varphi \cong \varphi$ pro úhel $\varphi \leq 14$ deg nabývá chyba hodnoty do 1 %, což je bezesporu přijatelné.

Po linearizaci a dílčích matematických operacích mají již lineární diferenciální rovnice druhého řádu následující tvar:

$$\ddot{\varphi} = \frac{F_{mot} - F_T - F_t - (m_B + m_j) \cdot g \cdot \varphi + (m_B + m_j) \cdot \frac{F_T}{m_B}}{m_j \cdot l} \quad (2.20)$$

$$\ddot{x}_J = \frac{F_{mot} - F_t - m_B \cdot g \cdot \varphi}{m_j} \quad (2.21)$$

Ze získaných rovnic (2.21) a (2.22) vyplývá, že pohyb jeřábové kočky a následný pohyb břemene již jsou matematicky svázány.

Nicméně, tento matematický popis není příliš vhodný pro praktické použití a to s ohledem na veličiny vstupující do výpočtu – zejména hnací sílu elektromotoru, která nebývá uváděna v katalogových listech výrobců elektromotorů a tudíž by bylo nutné tuto sílu vypočítat.

3 CÍLE DISERTAČNÍ PRÁCE

S ohledem na popis současného stavu a výše zmíněné poznatky a doporučení jsou specifikovány následující cíle disertační práce:

- zpřesnění matematického popisu pohybu kočky s břemenem tak, aby byla zohledněna jak vzdálenost těžiště břemene od jeřábového háku, tak samotný tvar uvažovaného břemene \Rightarrow přijetí dalšího stupně volnosti,
- sestavení a následně vyřešení získaných pohybových rovnic, analýza získaných výsledků,
- stanovení průměrného zrychlení pro rozjezd jeřábu, resp. kočky tak, aby nedošlo k překročení normou dovoleného úhlu vychýlení lana,
- stavba měřicího pracoviště,
- provedení měření a verifikace zvolené teorie popisující kmitání břemene.

Jednotlivé cíle disertační práce uvedené výše budou podrobně rozepsány v následujících kapitolách.

4 ZPŘESNĚNÍ MATEMATICKÉHO POPISU

Jak uvádí Ing. Leo Víta v [22], účinnost potlačování kývání břemene je závislá kromě již zmíněné délky odvinutého lana mj. na vzdálenosti těžiště břemene od jeřábového háku.

Dále, bude-li břemeno, resp. těžiště břemene, v určité vzdálenosti od jeřábového háku, nemůže nás tato skutečnost nepřivést k otázce, zdali nebude zavěšené břemeno při rozjezdu jeřábu vychylováno „nezávisle“ na jeřábovém háku.

Jinými slovy, je velice pravděpodobné, že břemeno v krajní poloze „překmitne“ jeřábový hák, resp. konec lana. Tím by byla velmi narušena exaktnost ostatních matematických popisů, které předpokládají stejný výkmit jeřábového háku a břemene.

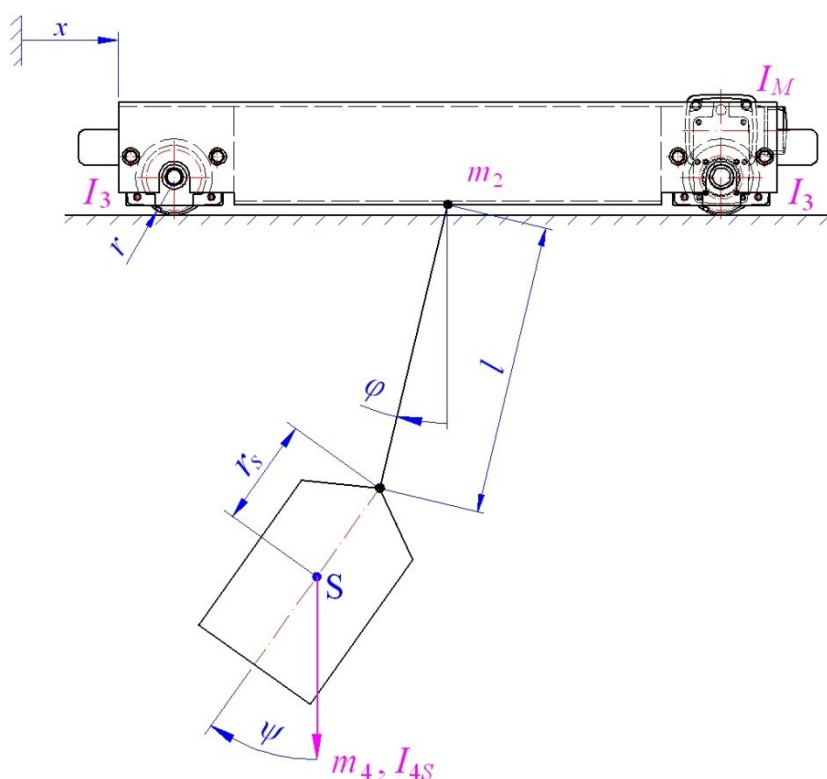
A konečně poslední otázkou je vliv tvaru břemene na jeho výkyv. Bude vychýlení dvou tvarově odlišných břemen, byť stejné hmotnosti, zavěšených na jeřábovém háku stejné?

Z výše uvedených úvah je zřejmé, že pro účely co největšího přiblížení se skutečnému stavu je nutno přijmout matematický popis pohybu kočky s břemenem, který by zmíněné úvahy zohlednil.

4.1 Nový matematický popis pohybu kočky s břemenem

Na základě uvedených úvah v kap. 4 je přijat zcela nový matematický popis pohybu kočky s břemenem.

Je zaveden další stupeň volnosti, tj. předpoklad, že břemeno zavěšené na konci lana, o němž je předpokládáno, že je tuhé a nehmotné, bude mít vyšší hodnotu vychýlení než samotné lano (viz obr. 4.1). Celkem tak bude mít uvažovaná soustava tři stupně volnosti a to translační pohyb kladkostroje x [m], rotační pohyb (kmitání) lana včetně závěsu φ [deg] a rotační pohyb (kmitání) břemene ψ [deg]. Všechny tři pohyby předpokládají, že jsou pohyby rovinnými.

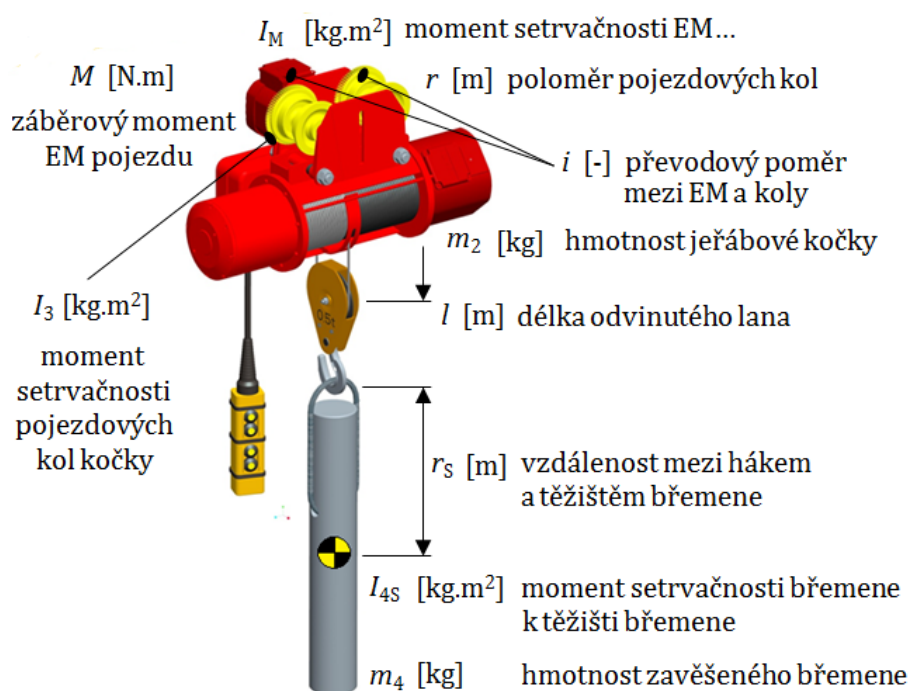


Zdroj: Autor dle [8]

Obr. 4.1 Schéma rozjíždějící se jeřábové kočky se zavěšeným břemenem

Dále je zřejmé, že zavěsíme-li na jeřábový hák např. kontejner, jeho výkyv bude jiný, než kdybychom na onen hák zavěsili např. dlouhou ocelovou tyč. Jinými slovy, je vhodné uvažovat břemeno nikoli jako hmotný bod, nýbrž jako skutečné reálné břemeno jednak s vlastní hmotností, jednak s vlastními rozměry. Tvar břemene bude zohledněn prostřednictvím hmotového momentu setrvačnosti I_{4S} [kg.m²] a vzdálenosti těžiště břemene od jeřábového háku r_S [m]. Hmotnost zavěšeného břemene je m_4 [kg].

S ohledem na téma disertační práce a také praktické využití bude dále uvažován záběrový moment elektromotoru M [N.m], moment setrvačnosti motoru včetně rotujících částí převodu redukovaných na hřídel elektromotoru I_M [kg.m²], dále poloměr pojezdových kol r [m] a jejich moment setrvačnosti I_3 [kg.m²] a samozřejmě délka odvinutého lana l [m]. Převod mezi poháněcím elektromotorem a poháněnými pojezdovými koly kočky je i [-], hmotnost jeřábové kočky je m_2 [kg].



Zdroj: Autor

Obr. 4.2 3D model jeřábové kočky se zavěšeným břemenem a výčtem veličin vstupujících do výpočtu nového matematického popisu pohybu kočky s břemenem

Na obr. 4.2 jsou zmíněné veličiny vstupující do výpočtu demonstrovány na 3D modelu jeřábové kočky se zavěšeným břemenem válcového tvaru.

4.2 Sestavení pohybových rovnic

S ohledem na poměrnou složitost soustavy budou pohybové rovnice odvozeny prostřednictvím Lagrangeovské formulace mechaniky, konkrétně Lagrangeových rovnic II. druhu.

Z obr. 4.1 je zřejmé, že se jedná o systém se třemi stupni volnosti \Rightarrow trivariantní systém, zkráceně systém se 3 DOFs. Z toho dále vyplývá, že k úplnému popisu dynamického chování systému bude zapotřebí tří nezávislých pohybových rovnic, poněvadž máme tři zobecněné souřadnice a to x [m], φ [deg] a ψ [deg].

4.2.1 Lagrangeovy rovnice II. druhu

Jak již bylo zmíněno, systém se třemi stupni volnosti musí být popsán třemi nezávislými rovnicemi. Každá rovnice představuje 1 DOF.

Pro tento konzervativní systém mají Lagrangeovy rovnice II. druhu na základě obr. 4.1 následující tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W}{\partial x} = F = \frac{M \cdot i}{r} \quad (4.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial W}{\partial \varphi} = M = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial W}{\partial \psi} = M = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{kde: } W - \text{kinetický potenciál, } W = W_k - W_p \text{ [J]} \quad (4.4)$$

$$F = \frac{M \cdot i}{r} \text{ [N]} - \text{hnací síla na obvodu kola} \rightarrow \text{nekonzervativní síla} \quad (4.5)$$

4.2.2 Kinetická energie systému

Kinetická energie systému W_k [J] se skládá z kinetické energie translačního pohybu a kinetické energie rotačního pohybu.

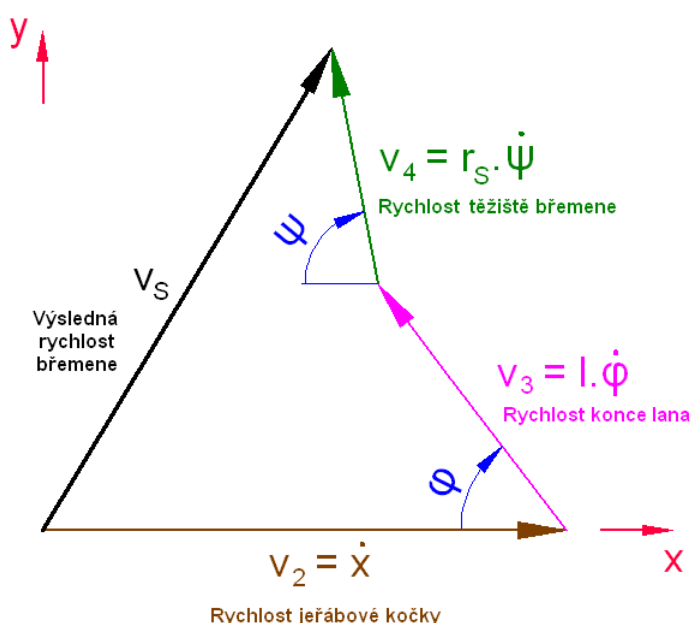
Pro účely výpočtu je nutno dosazovat rychlosti vyjádřené pomocí zobecněných souřadnic, neboť platí, že první derivace dráhy podle času je rychlost, tudíž dostáváme $v = \dot{x}$ [m.s⁻¹] a úhlovou rychlost kol kočky $\omega = \frac{v}{r} = \frac{\dot{x}}{r}$ [s⁻¹].

Vztahy pro zobecněné souřadnice (resp. zobecněné úhlové rychlosti a zobecněná úhlová zrychlení) φ [deg] a ψ [deg] jsou získány stejným způsobem.

Po dosazení uvedených rychlostí dostáváme kinetickou energii systému:

$$W_k = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2}_{\text{kladkostrž}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I_M \cdot i^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2}_{\text{převodový elektromotor}} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2}_{\text{pojezdová kola}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot v_s^2}_{\text{posuv břemene}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot I_{4S} \cdot \dot{\psi}^2}_{\text{rotace břemene}} \quad (4.6)$$

Jak vyplývá ze vztahu (4.6), břemeno se „posouvá“ rychlostí v_s [m.s⁻¹], která je však neznámá. Pro proveditelnost tohoto výpočtu je nutno vyjádřit rychlost v_s [m.s⁻¹] pomocí zobecněných souřadnic, jinými slovy, provést rozklad rychlostí, jak je uvedeno na obr. 4.3.



Zdroj: Autor

Obr. 4.3 Rozklad rychlostí za účelem stanovení výsledné rychlosti břemene

Výslednou rychlost v_s [m.s⁻¹] je nejprve nutné rozložit do složek ve směru os x a y .

$$v_{sx} = v_2 - v_3 \cdot \cos(\varphi) - v_4 \cdot \cos(\psi) = \dot{x} - l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi) \quad (4.7)$$

$$v_{sy} = v_3 \cdot \sin(\varphi) + v_4 \cdot \sin(\psi) = l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) + r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) \quad (4.8)$$

Poté získáme výslednou rychlost v_s [m.s⁻¹] algebraickým součtem

$$\begin{aligned} v_s^2 = v_{sx}^2 + v_{sy}^2 = \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r_s^2 \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos^2(\psi) - 2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \\ - 2 \cdot \dot{x} \cdot r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi) + 2 \cdot l \cdot r_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin^2(\varphi) + \\ + 2 \cdot l \cdot r_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + r_s^2 \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin^2(\psi) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Po úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned} v_s^2 = \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + r_s^2 \cdot \dot{\psi}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot [l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)] + \\ + 2 \cdot l \cdot r_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nyní již je možno rychlost v_s^2 [m.s⁻¹]² (4.10) zpětně dosadit do vztahu (4.6) a vyjádřit tak kinetickou energii systému.

$$\begin{aligned} W_k = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_M \cdot \dot{i}^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_3 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{4s} \cdot \dot{\psi}^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot \left\{ \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + r_s^2 \cdot \dot{\psi}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot [l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)] + \right. \\ \left. + 2 \cdot l \cdot r_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \right\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Výše uvedený vztah (4.11) je možné dále zjednodušit. Po zjednodušení tedy dostáváme:

$$W_k = \frac{1}{2} \cdot \left\{ m_2 \cdot \dot{x}^2 + I_M \cdot \dot{i}^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + 2 \cdot I_3 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r}\right)^2 + I_{4s} \cdot \dot{\psi}^2 + \right. \\ \left. + m_4 \cdot \left\{ \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + r_s^2 \cdot \dot{\psi}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot [l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_s \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot l \cdot r_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \right\} \right\} \quad (4.12)$$

4.2.3 Potenciální energie systému

Poněvadž se jedná o konzervativní (potenciální) silové pole, resp. konzervativní systém, je nutno uvažovat potenciální energii. Zvolíme-li kolejnici, po které pojíždí jeřábová kočka, jako hladinu nulové potenciální energie, dostaneme:

$$W_p = -m_4 \cdot g \cdot [l \cdot \cos(\varphi) + r_s \cdot \cos(\psi)] \quad (4.13)$$

4.2.4 Kinetický potenciál

Kinetický potenciál, v odborné literatuře rovněž nazýván jako Lagrangeova funkce či lagrangián, bývá obecně definován jako způsobilost k výkonu či poskytnutí práce energie. Jinými slovy, jedná se o rozdíl mezi kinetickou a potenciální energií.

$$W = W_k - W_p = \frac{1}{2} \cdot \left\{ m_2 \cdot \dot{x}^2 + I_M \cdot i^2 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 + 4 \cdot I_3 \cdot \left(\frac{\dot{x}}{r} \right)^2 + I_{4S} \cdot \dot{\psi}^2 + \right. \\ \left. + m_4 \cdot \left\{ \dot{x}^2 + l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + r_S^2 \cdot \dot{\psi}^2 - 2 \cdot \dot{x} \cdot [l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)] + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \right\} \right\} + \\ + m_4 \cdot g \cdot [l \cdot \cos(\varphi) + r_S \cdot \cos(\psi)] \quad (4.14)$$

4.2.5 Výpočet derivací

Jak je uvedeno ve vztazích (4.1), (4.2) a (4.3), Lagrangeovy rovnice II. druhu obsahují derivace podle příslušné zobecněné souřadnice a rovněž derivaci podle času.

Derivace kinetického potenciálu podle zobecněné souřadnice x :

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} \cdot \left[m_2 \cdot 2\dot{x} + I_M \cdot i^2 \cdot \frac{2\dot{x}}{r^2} + 4 \cdot I_3 \cdot \frac{2\dot{x}}{r^2} + m_4 \cdot 2\dot{x} - m_4 \cdot 2 \cdot (l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)) \right] \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} = m_2 \cdot \dot{x} + I_M \cdot i^2 \cdot \frac{\dot{x}}{r^2} + 4 \cdot I_3 \cdot \frac{\dot{x}}{r^2} + m_4 \cdot \dot{x} - m_4 \cdot (l \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi)) \quad (4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} \right) = m_2 \cdot \ddot{x} + I_M \cdot i^2 \cdot \frac{\ddot{x}}{r^2} + 4 \cdot I_3 \cdot \frac{\ddot{x}}{r^2} + m_4 \cdot \ddot{x} - m_4 \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + \\ + m_4 \cdot l \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi} - m_4 \cdot r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) + m_4 \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\psi} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (4.18)$$

Derivace kinetického potenciálu podle zobecněné souřadnice φ :

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot \left\{ l^2 \cdot 2 \cdot \dot{\varphi} - 2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \right\} \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}} = m_4 \cdot l^2 \cdot \dot{\phi} - m_4 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \cos(\varphi) + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}} \right) &= m_4 \cdot l^2 \cdot \ddot{\phi} - m_4 \cdot \ddot{x} \cdot l \cdot \cos(\varphi) + m_4 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \sin(\varphi) \cdot \dot{\phi} + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) \\ &\quad - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \cdot \dot{\phi} - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\psi} + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\phi} + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - m_4 \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= m_4 \cdot \dot{x} \cdot l \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\varphi) - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - m_4 \cdot g \cdot l \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Derivace kinetického potenciálu podle zobecněné souřadnice ψ :

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ I_{4S} \cdot 2 \cdot \dot{\psi} + m_4 \cdot r_S^2 \cdot 2 \cdot \dot{\psi} - m_4 \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot r_S \cdot \cos(\psi) + \right. \quad (4.24)$$

$$\left. + m_4 \cdot 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}} = I_{4S} \cdot \dot{\psi} + m_4 \cdot r_S^2 \cdot \dot{\psi} - m_4 \cdot \dot{x} \cdot r_S \cdot \cos(\psi) + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}} \right) &= I_{4S} \cdot \ddot{\psi} + m_4 \cdot r_S^2 \cdot \ddot{\psi} - m_4 \cdot \ddot{x} \cdot r_S \cdot \cos(\psi) + m_4 \cdot \dot{x} \cdot r_S \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\psi} + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \cdot \dot{\phi} - \\ &\quad - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\psi} + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \ddot{\phi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \\ &\quad + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) \cdot \dot{\phi} + m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \cdot \dot{\psi} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \psi} &= \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot \dot{x} \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) - \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot 2 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - m_4 \cdot g \cdot r_S \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \psi} &= m_4 \cdot \dot{x} \cdot r_S \cdot \dot{\psi} \cdot \sin(\psi) - m_4 \cdot l \cdot r_S \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} \cdot [\cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)] - \\ &\quad - m_4 \cdot g \cdot r_S \cdot \sin(\psi) \end{aligned} \quad (4.28)$$

4.2.6 Sestavení vlastních pohybových rovnic

Vlastní pohybové rovnice obdržíme dosazením vypočtených derivací do Lagrangeových rovnic II. druhu, tj. rovnic (4.1), (4.2) a (4.3).

Pohybová rovnice pro zobecněnou souřadnici x :

$$\ddot{x} \cdot \left(m_2 + I_M \cdot \frac{\dot{i}^2}{r^2} + 4 \cdot \frac{I_3}{r^2} + m_4 \right) - m_4 \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + m_4 \cdot l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - \\ - m_4 \cdot r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) + m_4 \cdot r_S \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi) = \frac{M \cdot i}{r} \quad (4.29)$$

Pohybová rovnice pro zobecněnou souřadnici φ :

$$l \cdot \ddot{\varphi} - \ddot{x} \cdot \cos(\varphi) + r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - r_S \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \\ + r_S \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + r_S \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad (4.30)$$

Pohybová rovnice pro zobecněnou souřadnici ψ :

$$\ddot{\psi} \cdot \frac{(I_{4S} + m_4 \cdot r_S^2)}{m_4 \cdot r_S} - \ddot{x} \cdot \cos(\psi) + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + \\ + g \cdot \sin(\psi) + l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) = 0 \quad (4.31)$$

Je zřejmé, že všechny tři výše uvedené vlastní pohybové rovnice jsou nelineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu, navíc se jedná o složitou soustavu diferenciálních rovnic, poněvadž každá pohybová rovnice obsahuje derivace všech tří zobecněných souřadnic.

4.3 Vyřešení pohybových rovnic

Cílem této kapitoly je vyřešení pohybových rovnic, tj. zmíněné soustavy tří nelineárních diferenciálních rovnic o třech neznámých.

Již ze samotných pohybových rovnic je zřejmé, že se jedná o velmi složitou soustavu rovnic. A je-li cílem nalezení konečného řešení v uzavřeném tvaru, je situace ještě komplikovanější.

Autorem této práce byla tato soustava řešena nejprve prostřednictvím Laplaceovy transformace, ta se však z důvodu silné nelinearity přítomné ve všech třech pohybových rovnicích ukázala jako nevhodná.

Dalším krokem bylo hledání řešení ve tvaru mocninných řad, prostřednictvím kterých by bylo možno řešit pohybové rovnice bez ohledu na nelinearitu, poněvadž jak je všeobecně známo, pomocí řad lze rozepsat i goniometrické funkce. Nicméně, pro řešení inženýrských úloh je doporučováno používat poněkud vyšší koeficient, což opět z důvodu několika součinů, navíc ve vyšší mocnině, nevedlo ke zdárnému řešení, byť byl k tomuto účelu použit sofistikovaný matematický software.

Poslední možností se tedy zdálo aproximované řešení, které bylo shodou okolností na samotném počátku považováno za nevhodné. Toto řešení nakonec vedlo ke zdárnému konci a jeho popis je uveden v následujících podkapitolách.

4.3.1 Zavedení zjednodušujících konstant

Za účelem zjednodušení řešení soustavy jsou zavedeny následující zjednodušující konstanty, sdružující veličiny vstupující do výpočtu v pořadí, v jakém jsou uvedeny v pohybových rovnicích.

Tab. 4.1 Parametry zvolené jeřábové kočky a břemene

Hmotnost jeřábové kočky	m_2	163	[kg]
Moment setrvačnosti pojezdového kola kočky	I_3	0,00786	[kg.m ²]
Poloměr pojezdových kol kočky	r	0,06	[m]
Hmotový moment setrvačnosti motoru a převodu redukovaný na hřídel elektromotoru	I_M	0,0007	[kg.m ²]
Záběrový moment elektromotoru pojezdu kočky	M	1,863	[N.m]
Převodový poměr	i	15,457	[-]
Délka odvinutého lana	l		[m]
Hmotnost břemene	m_4		[kg]
Hmotový moment setrvačnosti břemene	I_{4S}		[kg.m ²]
Vzdálenost mezi kladnicí těžištěm břemene	r_S		[m]
Tíhové zrychlení	g	9,81	[m.s ⁻²]

Zdroj: Autor

Zjednodušující konstanty:

$$A = m_2 + I_M \cdot \frac{i^2}{r^2} + 4 \cdot \frac{I_3}{r^2} + m_4 \quad (4.32)$$

$$B = m_4 \cdot l \quad (4.33)$$

$$C = m_4 \cdot r_S \quad (4.34)$$

$$D = \frac{M \cdot i}{r} \quad (4.35)$$

$$E = \frac{(I_{4S} + m_4 \cdot r_S^2)}{m_4 \cdot r_S} \quad (4.36)$$

Hodnoty týkající se jeřábové kočky uvedené v tab. 4.1 jsou skutečnými hodnotami zvolenými na základě katalogového listu jeřábové kočky Balkancar, která je k dispozici v laboratoři Ústavu dopravních a procesních zařízení, Institutu dopravy na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě v Ostravě (viz kap. 5.1.3).

Po dosazení těchto zjednodušujících konstant do pohybových rovnic (4.29), (4.30) a (4.31) dostáváme:

$$A \cdot \ddot{x} - B \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) + B \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - C \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) + C \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi) = D \quad (4.37)$$

$$l \cdot \ddot{\varphi} - \ddot{x} \cdot \cos(\varphi) + r_s \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - r_s \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \\ + r_s \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + r_s \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad (4.38)$$

$$\ddot{\psi} \cdot E - \ddot{x} \cdot \cos(\psi) + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\psi) + \\ + l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) = 0 \quad (4.39)$$

4.3.2 Dílčí matematické úpravy

Vzhledem k tomu, že všechny tři pohybové rovnice obsahují souřadnici x , je možné ji za účelem zjednodušení vyjádřit z pohybové rovnice (4.37) a následně ji dosadit do pohybových rovnic (4.38) a (4.39).

Vyjádření souřadnice x :

$$\ddot{x} = \frac{D + B \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - B \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + C \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) - C \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi)}{A} \quad (4.40)$$

A po dosazení rovnice (4.40) do pohybových rovnic (4.38) a (4.39) dostáváme:

$$l \cdot \ddot{\varphi} - \frac{D + B \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - B \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + C \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) - C \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi)}{A} \cdot \cos(\varphi) + \\ + r_s \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - r_s \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + r_s \cdot \ddot{\psi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \\ + r_s \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\varphi) = 0 \quad (4.41)$$

$$\ddot{\psi} \cdot E - \frac{D + B \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - B \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + C \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) - C \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi)}{A} \cdot \cos(\psi) + \\ + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\psi) + \\ + l \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) = 0 \quad (4.42)$$

Po úpravě rovnic (4.41) a (4.42) získáváme:

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} \cdot \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] + \ddot{\psi} \cdot \left[r_s \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) + r_s \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \cos(\varphi) \right] + \\ & \dot{\psi}^2 \cdot \left[\frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) - r_s \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + r_s \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \right] + \\ & \dot{\varphi}^2 \cdot \frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \frac{D}{A} \cdot \cos(\varphi) + g \cdot \sin(\varphi) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} & \ddot{\psi} \cdot \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] + \ddot{\varphi} \cdot \left[l \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + l \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) \right] + \\ & \dot{\varphi}^2 \cdot \left[l \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - l \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \right] + \\ & \dot{\psi}^2 \cdot \frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) - \frac{D}{A} \cdot \cos(\psi) + g \cdot \sin(\psi) = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Je zřejmé, že rovnice (4.43) a (4.44) mohou být zjednodušeny zavedením další zjednodušující konstanty. Tudíž:

$$F = 1 - \frac{C}{A \cdot r_s} \quad (4.45)$$

$$F = 1 - \frac{B}{A \cdot l} \quad (4.46)$$

Jak vyplývá z výše uvedených konstant (4.45) a (4.46), jsou totožné, což je zřejmé z definičního vztahu konstant C a B , uvedených v tab. 4.1.

Po zavedení zjednodušující konstanty (4.45) do rovnice (4.43) a zjednodušující konstanty (4.46) do rovnice (4.44) dostáváme:

$$\begin{aligned} & \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot \ddot{\varphi} + r_s \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \ddot{\psi} = \\ & = - \left[\frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right] \cdot \dot{\varphi}^2 + r_s \cdot [F \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \dot{\psi}^2 + \\ & + \frac{D}{A} \cdot \cos(\varphi) - g \cdot \sin(\varphi) \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
& l \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \ddot{\varphi} + \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] \cdot \ddot{\psi} = \\
& = l \cdot [F \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \cdot \dot{\varphi}^2 - \left[\frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \right] \cdot \dot{\psi}^2 + \\
& + \frac{D}{A} \cdot \cos(\psi) - g \cdot \sin(\psi)
\end{aligned} \tag{4.48}$$

4.3.3 Maticový zápis

Rovnice (4.47) a (4.48) lze zapsat ve formě maticového zápisu (resp. vyjádření), tudíž:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{cc} l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) & r_S \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \\ l \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] & E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \end{array} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{Bmatrix} = \\
& \left\{ \begin{array}{cc} -\frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) & r_S \cdot [F \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \\ l \cdot [F \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)] & -\frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \end{array} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\psi}^2 \end{Bmatrix} + \\
& \begin{Bmatrix} \frac{D}{A} \cdot \cos(\varphi) - g \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{D}{A} \cdot \cos(\psi) - g \cdot \sin(\psi) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Soustava bude vyřešena vynásobením inverzní maticí k matici na levé straně a následným roznásobením pravé strany.

Inverzní matice má následující tvar:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{cc} E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) & -r_S \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \\ -l \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] & l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \end{array} \right\} \\
& \frac{\left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] - l \cdot r_S \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)]^2}{}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

4.3.4 Úprava na Cramerovo pravidlo

Označíme-li:

$$u_0 = \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] - l \cdot r_s \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)]^2 \quad (4.51)$$

$$u_{11} = - \left[\frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \right] \cdot \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] - [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot [F \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \cdot l \cdot r_s \quad (4.52)$$

$$u_{12} = \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] \cdot [F \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot r_s + [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \cdot r_s \quad (4.53)$$

$$u_{21} = \frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot l + \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot [F \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi)] \cdot l \quad (4.54)$$

$$u_{22} = - [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot [F \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot l \cdot r_s - \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot \frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\psi) \quad (4.55)$$

$$v_1 = \left[E - \frac{C}{A} \cdot \cos^2(\psi) \right] \cdot \left[\frac{D}{A} \cdot \cos(\varphi) - g \cdot \sin(\varphi) \right] - [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \left[\frac{D}{A} \cdot \cos(\psi) - g \cdot \sin(\psi) \right] \cdot r_s \quad (4.56)$$

$$v_2 = - [\sin(\varphi) \cdot \sin(\psi) + F \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi)] \cdot \left[\frac{D}{A} \cdot \cos(\varphi) - g \cdot \sin(\varphi) \right] \cdot l + \left[l - \frac{B}{A} \cdot \cos^2(\varphi) \right] \cdot \left[\frac{D}{A} \cdot \cos(\psi) - g \cdot \sin(\psi) \right] \quad (4.57)$$

Poté získáme ze vztahu (4.49) dle Cramerova pravidla maticový zápis ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{11}}{u_0} & \frac{u_{12}}{u_0} \\ \frac{u_{21}}{u_0} & \frac{u_{22}}{u_0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}^2 \\ \dot{\psi}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{v_1}{u_0} \\ \frac{v_2}{u_0} \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

Označíme-li nyní:

$$\varphi_v = \dot{\varphi} \quad (4.59)$$

$$\psi_v = \dot{\psi} \quad (4.60)$$

Poté platí:

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}_v \quad (4.61)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\psi}_v \quad (4.62)$$

A tudíž získáváme soustavu čtyř rovnic:

$$\dot{\varphi} = \varphi_v \quad (4.63a)$$

$$\dot{\psi} = \psi_v \quad (4.63b)$$

$$\dot{\varphi}_v = \frac{u_{11}}{u_0} \cdot \varphi_v^2 + \frac{u_{12}}{u_0} \cdot \psi_v^2 + \frac{v_1}{u_0} \quad (4.63c)$$

$$\dot{\psi}_v = \frac{u_{21}}{u_0} \cdot \varphi_v^2 + \frac{u_{22}}{u_0} \cdot \psi_v^2 + \frac{v_2}{u_0} \quad (4.63d)$$

kde u_0 , u_{11} , u_{12} , u_{21} , u_{22} , v_1 a v_2 jsou funkce proměnných φ a ψ .

Je zřejmé, že výše uvedené rovnice (4.63a) až (4.63d) představují soustavu čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu, přičemž okrajové podmínky jsou následující:

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi_v(0) = \psi_v(0) = 0 \quad (4.64)$$

Výše uvedené okrajové podmínky jsou nulové, poněvadž soustava je na začátku ve stavu klidu.

Soustavu (4.63a) až (4.63d) s okrajovými podmínkami (4.64) je možné řešit numericky, např. dvoukrokovou metodou.

Použijeme-li časový interval Δt a označíme-li:

$$t_k = k \cdot \Delta t, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad \psi_k = \psi(t_k), \quad \varphi_{vk} = \varphi_v(t_k) \text{ a konečně } \psi_{vk} = \psi_v(t_k),$$

poté máme:

$$\varphi_0 = \psi_0 = \varphi_{v0} = \psi_{v0} = 0 \quad (4.65)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0 \quad (4.66)$$

$$\varphi_{v1} \cong \frac{v_1(0,0)}{u_0(0,0)} \cdot \Delta t \quad \text{a} \quad \psi_{v1} \cong \frac{v_2(0,0)}{u_0(0,0)} \cdot \Delta t \quad (4.67)$$

A dále:

$$\varphi_{k+1} \cong \varphi_{k-1} + 2 \cdot \varphi_{vk} \cdot \Delta t \quad (4.68a)$$

$$\psi_{k+1} \cong \psi_{k-1} + 2 \cdot \psi_{vk} \cdot \Delta t \quad (4.68b)$$

$$\varphi_{vk+1} \cong \varphi_{vk-1} + 2 \cdot \Delta t \cdot \left[\frac{u_{11}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \cdot \varphi_{vk}^2 + \frac{u_{12}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \cdot \psi_{vk}^2 + \frac{v_1(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \right] \quad (4.69c)$$

$$\psi_{vk+1} \cong \psi_{vk-1} + 2 \cdot \Delta t \cdot \left[\frac{u_{21}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \cdot \varphi_{vk}^2 + \frac{u_{22}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \cdot \psi_{vk}^2 + \frac{v_2(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \right] \quad (4.69d)$$

4.3.5 Vyřešení souřadnice x

Jen pro připomenutí, vztah (4.40) má tvar:

$$\ddot{x} = \frac{D + B \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - B \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + C \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) - C \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi)}{A}$$

Výše uvedený vztah (4.40) je vhodné zapsat v rozšířeném tvaru:

$$\ddot{x} = \frac{D}{A} + \frac{B}{A} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos(\varphi) - \frac{B}{A} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) + \frac{C}{A} \cdot \ddot{\psi} \cdot \cos(\psi) - \frac{C}{A} \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi) \quad (4.70)$$

A po dosazení z maticového zápisu (4.58) získáváme:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi) - \frac{C}{A} \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi) + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\frac{u_{11} \cdot \dot{\varphi}^2 + u_{12} \cdot \dot{\psi}^2 + v_1}{u_0} \right) + \\ &+ \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \left(\frac{u_{21} \cdot \dot{\varphi}^2 + u_{22} \cdot \dot{\psi}^2 + v_2}{u_0} \right) = \\ &= \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot \varphi_v^2 \cdot \sin(\varphi) - \frac{C}{A} \cdot \psi_v^2 \cdot \sin(\psi) + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{u_{11}}{u_0} \cdot \varphi_v^2 + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{u_{12}}{u_0} \cdot \psi_v^2 + \\ &+ \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{v_1}{u_0} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{u_{21}}{u_0} \cdot \varphi_v^2 + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{u_{22}}{u_0} \cdot \psi_v^2 + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{v_2}{u_0} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Po úpravě dostáváme:

$$\begin{aligned}\ddot{x} = & \left[-\frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi) + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{u_{11}}{u_0} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{u_{21}}{u_0} \right] \cdot \varphi_v^2 + \\ & + \left[\frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{u_{12}}{u_0} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{u_{22}}{u_0} - \frac{C}{A} \cdot \sin(\psi) \right] \cdot \psi_v^2 + \\ & + \frac{D}{A} + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{v_1}{u_0} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi) \cdot \frac{v_2}{u_0}\end{aligned}\quad (4.72)$$

Okrajové podmínky jsou následující:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (4.73)$$

A označíme-li:

$$x_v = \dot{x}, \quad x_k = x(t_k), \quad x_{vk} = x_v(t_k) \quad (4.74)$$

Poté aplikací dvojkrokové metody získáme tyto odhady:

$$x_0 = x_{v0} = 0 \quad (4.75)$$

$$x_1 \cong 0, \quad x_{v1} \cong \dot{x}_{v0} \cdot \Delta t \quad (4.76)$$

$$x_{k+1} \cong x_{k-1} + 2 \cdot x_{vk} \cdot \Delta t \quad (4.77)$$

$$x_{vk+1} \cong x_{vk-1} + 2 \cdot \dot{x}_{vk} \cdot \Delta t, \quad (4.78)$$

kde:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{vk} = & \left[-\frac{B}{A} \cdot \sin(\varphi_k) + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi_k) \cdot \frac{u_{11}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi_k) \cdot \frac{u_{21}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} \right] \cdot \varphi_{vk}^2 + \\ & + \left[\frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi_k) \cdot \frac{u_{12}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi_k) \cdot \frac{u_{22}(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} - \frac{C}{A} \cdot \sin(\psi_k) \right] \cdot \psi_{vk}^2 + \\ & + \frac{D}{A} + \frac{B}{A} \cdot \cos(\varphi_k) \cdot \frac{v_1(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)} + \frac{C}{A} \cdot \cos(\psi_k) \cdot \frac{v_2(\varphi_k, \psi_k)}{u_0(\varphi_k, \psi_k)}\end{aligned}\quad (4.79)$$

Numerické řešení soustavy je tím přesnější, čím menší zvolíme časový interval Δt [s], přičemž chyba řešení je úměrná druhé mocnině časového intervalu, tj. $(\Delta t)^2$ [s²].

Je-li záběrový moment motoru M [N.m] dostatečně malý, jsou malé také úhly vychýlení lana φ [deg] a břemene ψ [deg] \Rightarrow tudíž je možno použít aproximace:

$$\sin(\varphi) \cong \varphi, \quad \cos(\varphi) \cong 1 \quad (4.80)$$

$$\sin(\psi) \cong \psi, \cos(\psi) \cong 1 \quad (4.81)$$

Aplikací výše zmíněných aproximací lze vztahy (4.47) a (4.48) výrazně zjednodušit.

Po zjednodušení tedy dostáváme:

$$\left(l - \frac{B}{A}\right) \cdot \ddot{\varphi} + r_s \cdot (\varphi \cdot \psi + F) \cdot \ddot{\psi} \cong -\frac{B}{A} \cdot \varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + r_s \cdot (F \cdot \psi - \varphi) \cdot \dot{\psi}^2 + \frac{D}{A} - g \cdot \varphi \quad (4.82)$$

$$l \cdot (\varphi \cdot \psi + F) \cdot \ddot{\varphi} + \left(E - \frac{C}{A}\right) \cdot \ddot{\psi} \cong l \cdot (F \cdot \varphi - \psi) \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{C}{A} \cdot \psi \cdot \dot{\psi}^2 + \frac{D}{A} - g \cdot \psi \quad (4.83)$$

Dále, poněvadž jsou úhly vychýlení φ [deg] a ψ [deg] dostatečně malé, pak lze ve vztazích (4.82) a (4.83) vynechat všechny členy, v nichž se tyto úhly a jejich derivace vyskytují ve vyšší než první mocnině, čímž získáme:

$$\left(l - \frac{B}{A}\right) \cdot \ddot{\varphi} + r_s \cdot F \cdot \ddot{\psi} \cong \frac{D}{A} - g \cdot \varphi \quad (4.84)$$

$$l \cdot F \cdot \ddot{\varphi} + \left(E - \frac{C}{A}\right) \cdot \ddot{\psi} \cong \frac{D}{A} - g \cdot \psi \quad (4.85)$$

Výše uvedené vztahy (4.84) a (4.85) představují soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, která bude nyní vyřešena.

Zavedeme-li substituce:

$$\varphi = \frac{D}{A \cdot g} + \alpha \quad (4.86)$$

$$\psi = \frac{D}{A \cdot g} + \beta \quad (4.87)$$

Dostáváme:

$$\begin{pmatrix} l - \frac{B}{A} & r_s \cdot F \\ l \cdot F & E - \frac{C}{A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + g \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \quad (4.88)$$

Vynásobíme-li druhou rovnici z maticového zápisu (4.88) číslem $p \in \mathbb{R}$ a sečteme-li ji s první rovnicí, dostaneme:

$$\left(l - \frac{B}{A} + p \cdot l \cdot F\right) \cdot \ddot{\alpha} + \left(r_s \cdot F + p \cdot E - p \cdot \frac{C}{A}\right) \cdot \ddot{\beta} + g \cdot (\alpha + p \cdot \beta) = 0 \quad (4.89)$$

Odtud:

$$\begin{aligned} &\left(l - \frac{B}{A} + p \cdot l \cdot F\right) \cdot (\ddot{\alpha} + p \cdot \ddot{\beta}) + g \cdot (\alpha + p \cdot \beta) + \\ &+ \left(r_s \cdot F + p \cdot E - p \cdot \frac{C}{A} - p \cdot l + p \cdot \frac{B}{A} - p^2 \cdot l \cdot F\right) \cdot \ddot{\beta} = 0 \end{aligned} \quad (4.90)$$

Tedy:

$$\begin{aligned} &\left(l - \frac{B}{A} + p \cdot l \cdot F\right) \cdot (\ddot{\alpha} + p \cdot \ddot{\beta}) + g \cdot (\alpha + p \cdot \beta) = \\ &= \left[p^2 \cdot l \cdot F + p \cdot \left(l - E + \frac{C}{A} - \frac{B}{A}\right) - r_s \cdot F\right] \cdot \ddot{\beta} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Označíme-li p_1, p_2 kořeny rovnice (4.92)

$$p^2 \cdot l \cdot F + p \cdot \left(l - E + \frac{C - B}{A}\right) - r_s \cdot F = 0 \quad (4.92)$$

$$p_{1,2} = \frac{-\left(l - E + \frac{C - B}{A}\right) \pm \sqrt{\left(l - E + \frac{C - B}{A}\right)^2 - 4 \cdot l \cdot r_s \cdot F^2}}{2 \cdot l \cdot F} \quad (4.93)$$

Potom získáme:

$$\left(l - \frac{B}{A} + p_k \cdot l \cdot F\right) \cdot (\ddot{\alpha} + p_k \cdot \ddot{\beta}) + g \cdot (\alpha + p_k \cdot \beta) = 0 \quad (4.94)$$

A označíme-li:

$$T_k = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l - \frac{B}{A} + p_k \cdot l \cdot F}{g}} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \alpha + p_1 \cdot \beta \\ \gamma_2 &= \alpha + p_2 \cdot \beta \end{aligned} \quad (4.96)$$

Máme:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &\cong \lambda_{11} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \lambda_{12} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) \\ \gamma_2 &\cong \lambda_{21} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) + \lambda_{22} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\end{aligned}\tag{4.97}$$

A po dosazení ze vztahů (4.86) a (4.87) dostáváme:

$$\varphi + p_1 \cdot \psi \cong (1 + p_1) \cdot \frac{D}{A \cdot g} + \lambda_{11} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \lambda_{12} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right)\tag{4.98}$$

$$\varphi + p_2 \cdot \psi \cong (1 + p_2) \cdot \frac{D}{A \cdot g} + \lambda_{21} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) + \lambda_{22} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\tag{4.99}$$

A protože $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \psi(0) = \dot{\psi}(0)$, máme:

$$\varphi + p_1 \cdot \psi \cong (1 + p_1) \cdot \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right)\right]\tag{4.100}$$

$$\varphi + p_2 \cdot \psi \cong (1 + p_2) \cdot \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\right]\tag{4.101}$$

A odtud:

$$\varphi \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 - \frac{p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \frac{p_1 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\right]\tag{4.102}$$

$$\psi \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 + \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) - \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\right]\tag{4.103}$$

Protože:

$$\left|\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right)\right| \leq 1 \quad \text{a} \quad \left|\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)\right| \leq 1, \text{ dostáváme:}$$

$$\varphi_{\max} \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 + \frac{|p_2 \cdot (1 + p_1)| + |p_1 \cdot (1 + p_2)|}{|p_2 - p_1|}\right]\tag{4.104}$$

$$\psi_{\max} \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 + \frac{|1 + p_1| + |1 + p_2|}{|p_2 - p_1|}\right]\tag{4.105}$$

Z Viètových vzorců je podle (4.93):

$$p_1 \cdot p_2 = -\frac{r_s \cdot F}{l \cdot F} = -\frac{r_s}{l} \Rightarrow -\frac{r_s}{l} < 0 \quad (4.106)$$

Tudíž, označíme-li kořeny tak, že $p_1 < 0$, $p_2 > 0$ a dále označíme-li, že:

$$f(p) = p^2 \cdot l \cdot F + p \cdot \left(l - E + \frac{C - B}{A} \right) - r_s \cdot F \quad (4.107)$$

poté je: $f(0) = -r_s \cdot F < 0$ (4.108). A dále:

$$\begin{aligned} f(-1) &= l \cdot F - l + E - \frac{C}{A} + \frac{B}{A} - r_s \cdot F = l \cdot \left(1 - \frac{C}{A \cdot r_s} \right) - l + E + \frac{B - C}{A} - r_s \cdot \left(1 - \frac{C}{A \cdot r_s} \right) = \\ &= -\frac{l \cdot C}{A \cdot r_s} + E + \frac{B - C}{A} - r_s + \frac{C}{A} = -\frac{l \cdot C}{A \cdot r_s} + E + \frac{B}{A} - r_s = -\frac{l \cdot B \cdot \frac{r_s}{l}}{A \cdot r_s} + E + \frac{B}{A} - r_s = \\ &= E - r_s = r_s + \frac{I_{4S}}{m_4 \cdot r_s} - r_s = \frac{I_{4S}}{m_4 \cdot r_s} > 0 \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\text{Nutně tedy je: } -1 < p_1 < 0 < p_2 \quad (4.110)$$

A po dosazení do vztahů (4.104) a (4.105) dostáváme maximální hodnoty úhlů vychýlení, tj.:

$$\varphi_{\max} \cong 2 \cdot \frac{D}{A \cdot g} = 2 \cdot \frac{M \cdot i}{A \cdot r \cdot g} \quad (4.111)$$

$$\psi_{\max} \cong 2 \cdot \frac{D}{A \cdot g} \cdot \frac{p_2 + 1}{p_2 - p_1} \quad (4.112)$$

Nyní ještě zbývá odhadnout x . K tomuto účelu je nutné ve vztahu (4.70) vynechat malé členy $\frac{B}{A} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin(\varphi)$ a $\frac{C}{A} \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \sin(\psi)$. Dále, použijeme-li $\cos(\varphi) \cong 1$, $\cos(\psi) \cong 1$, dostaneme:

$$\ddot{x} \cong \frac{D}{A} + \frac{B}{A} \cdot \ddot{\varphi} + \frac{C}{A} \cdot \ddot{\psi} \quad (4.113)$$

A po dosazení do vztahů (4.102) a (4.103) máme:

$$\begin{aligned}\ddot{x} \cong & \frac{D}{A} + \frac{B \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} \right) - \\ & - \frac{B \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \frac{p_1 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2} \right) - \frac{C \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} \right) + \\ & + \frac{C \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2} \right)\end{aligned}\quad (4.114)$$

Tudíž:

$$\ddot{x} \cong \frac{D}{A} + \left[\begin{aligned} & (B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} \right) - \\ & (B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2} \right) \end{aligned} \right] \cdot \frac{D}{A^2 \cdot g} \quad (4.115)$$

Integrací obdržíme rychlost jeřábové kočky \dot{x} , tedy:

$$\dot{x} \cong \frac{D}{A} \cdot t + \frac{D}{A^2 \cdot g} \cdot \left[\begin{aligned} & (B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} \right) - \\ & (B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2} \right) \end{aligned} \right] + C_1 \quad (4.116)$$

A po druhé integraci obdržíme ujetou vzdálenost kočky x , tudíž:

$$\begin{aligned}x \cong & \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A} \cdot t^2 - \frac{D}{A^2 \cdot g} \cdot (B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1} \right) + \\ & + \frac{D}{A^2 \cdot g} \cdot (B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2} \right) + C_1 \cdot t + C_2\end{aligned}\quad (4.117)$$

Poněvadž $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, ze vztahů (4.116) a (4.117) získáme integrační konstanty, tedy:

$$C_1 = 0 \quad \text{a} \quad C_2 = \frac{(B + C) \cdot D}{A^2 \cdot g} \quad (4.118)$$

A po dosazení docházíme k finálnímu vztahu:

$$x \cong \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A} \cdot t^2 + \frac{(B+C) \cdot D}{A^2 \cdot g} - \frac{(B \cdot p_2 - C) \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \frac{1+p_1}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \frac{(B \cdot p_1 - C) \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \frac{1+p_2}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \quad (4.119)$$

Tímto jsou vyřešeny všechny tři hledané časové závislosti. V následující kapitole budou jednotlivé časové závislosti zrekapitulovány.

4.3.6 Rekapitulace získaných výsledných vztahů

Níže jsou uvedeny vyřešené pohybové rovnice pro souřadnice x , φ a ψ . Tyto rovnice jsou platné za předpokladu, že výchylky φ a ψ jsou dostatečně malé.

Ujetá vzdálenost jeřábové kočky x [m], vychýlení lana φ [deg] a vychýlení břemene ψ [deg] v čase t [s]:

$$x \cong \frac{1}{2} \cdot \frac{D}{A} \cdot t^2 + \frac{(B+C) \cdot D}{A^2 \cdot g} - \frac{(B \cdot p_2 - C) \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \frac{1+p_1}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \frac{(B \cdot p_1 - C) \cdot D}{A^2 \cdot g} \cdot \frac{1+p_2}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \quad (4.119)$$

$$\varphi \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 - \frac{p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \frac{p_1 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.102)$$

$$\psi \cong \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[1 + \frac{1+p_1}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) - \frac{1+p_2}{p_2-p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.103)$$

Rychlost jeřábové kočky \dot{x} [m.s⁻¹], úhlová rychlost konce lana $\dot{\varphi}$ [s⁻¹] a těžiště břemene $\dot{\psi}$ [s⁻¹] v čase t [s]:

$$\dot{x} \cong \frac{D}{A} \cdot t + \frac{D}{A^2 \cdot g} \cdot \left[\frac{(B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1+p_1}{p_2-p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right)}{(B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1+p_2}{p_2-p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right)} \right] \quad (4.116)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right) \cdot \frac{p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) - \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right) \cdot \frac{p_1 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.120)$$

$$\dot{\psi} = \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[-\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.121)$$

Pozn.: Výše uvedené vztahy (4.120) a (4.121) byly získány derivací vztahů (4.102) a (4.103)

Zrychlení jeřábové kočky \ddot{x} [m.s⁻²], úhlové zrychlení konce lana $\ddot{\varphi}$ [s⁻²] a těžiště břemene $\ddot{\psi}$ [s⁻²] v čase t [s]:

$$\ddot{x} \cong \frac{D}{A} + \left[\begin{aligned} &(B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) - \\ &(B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \end{aligned} \right] \cdot \frac{D}{A^2 \cdot g} \quad (4.115)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{p_2 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) - \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \frac{p_1 + p_1 \cdot p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.122)$$

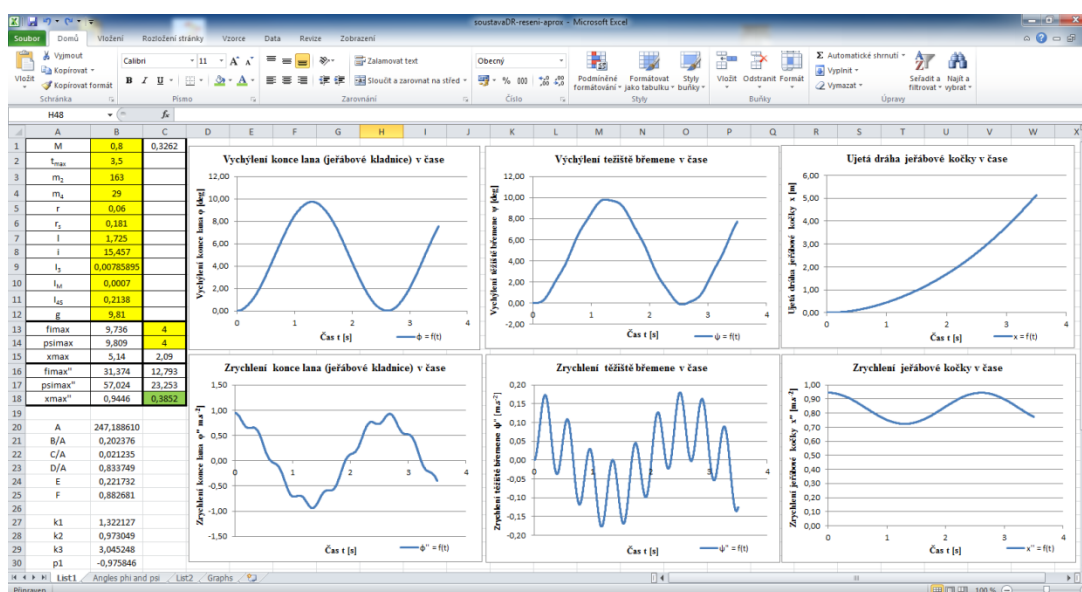
$$\ddot{\psi} = \frac{D}{A \cdot g} \cdot \left[-\left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1} \right)^2 \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_1}\right) + \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2} \right)^2 \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T_2}\right) \right] \quad (4.123)$$

Pozn.: Výše uvedené vztahy (4.122) a (4.123) byly získány derivací vztahů (4.120) a (4.121).

4.4 Aproximované řešení v prostředí MS Excel

Na základě vyřešených pohybových rovnic bylo v prostředí programu MS Excel [1] vytvořeno aproximované řešení (viz obr. 4.4), ve kterém je možno zadávat hodnoty jednotlivých veličin vstupujících do výpočtu a samozřejmě čas t [s], přičemž program ihned vykresluje teoretické průběhy hledaných neznámých v závislosti na čase t [s], konkrétně $x(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\varphi(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$, $\psi(t)$ a $\ddot{\psi}(t)$, slovy ujetou vzdálenost a zrychlení jeřábové kočky, dále vychýlení a úhlové zrychlení konce lana (resp. jeřábového háku) a konečně vychýlení a úhlové zrychlení těžiště břemene.

Do žlutě vybarvených buněk je možné zadávat hodnoty vstupních veličin, tj. veličin uvedených v tab. 4.1, kap. 4.3.1. Kromě těchto veličin je zadáván také časový interval, resp. jeho horní hranice – tj. hodnota v [s], do které bude program vykreslovat časové průběhy hledaných neznámých.



Zdroj: Autor

Obr. 4.4 Aproximované řešení v prostředí programu MS Excel 2010

Posledními zadávanými hodnotami jsou max. dovolené hodnoty vychýlení lana a břemene. Po zadání těchto hodnot program vypočítá hodnotu zrychlení jeřábové kočky, při které nedojde k překročení zadaných hodnot. Tato hodnota je uvedena v buňce zvýrazněné světle zelenou barvou, jak bude ještě dále upřesněno. Aproximované řešení v prostředí MS Excel totiž umožňuje vyjádřit hodnotu zrychlení jeřábové kočky, při kterém nedojde k překročení normou dovolených úhlů, přičemž hodnoty těchto úhlů je možné nastavit a samozřejmě také měnit (viz následující kapitola).

4.5 Stanovení zrychlení jeřábové kočky pro účely řízení rozběhu

Cílem této podkapitoly je tedy vyjádření vztahů popisujících stanovení hodnoty zrychlení jeřábové kočky za výše uvedených podmínek, tj. zadání hodnot max. dovoleného výkyvu konce lana a těžiště břemene, tj. φ_{dov} [deg] a ψ_{dov} [deg].

Při přibližném řešení vztahů (4.102), (4.103) a (4.119) je zřejmé, že hodnoty φ [deg], ψ [deg] a x [m] a tím i \ddot{x} [m.s⁻²] jsou lineární funkcí hodnoty D , která je přitom přímo úměrná záběrovému momentu elektromotoru M [N.m].

To znamená, že kritická hodnota krouticího momentu M_{krit} [N.m] je vypočtena jako součin záběrového momentu M [N.m] a menší z hodnot poměru maximálního a vypočteného úhlu φ_{max} [deg] a ψ_{max} [deg], viz vztahy (4.111) a (4.112), tudíž:

$$M_{krit} = M \cdot \min\left(\frac{\varphi_{dov}}{\varphi_{max}}; \frac{\psi_{max}}{\psi_{max}}\right) \quad (4.124)$$

Podobným způsobem je vyjádřena mezní hodnota zrychlení jeřábové kočky, tedy:

$$\ddot{x}_{krit} = \ddot{x}_{max} \cdot \min\left(\frac{\varphi_{dov}}{\varphi_{max}}; \frac{\psi_{max}}{\psi_{max}}\right) \quad (4.125)$$

Odhad maximálního zrychlení je evidentně takový, že nahradíme-li ve vztahu (4.115) kosiny hodnotou 1 nebo -1 (podle znaménka $B \cdot p_2 - C$ a $B \cdot p_1 - C$), dostáváme:

$$\ddot{x}_{max} \cong \frac{D}{A} + \left[\left| (B \cdot p_2 - C) \cdot \frac{1 + p_1}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_1}\right)^2 \cdot (-1) \right| + \left| (B \cdot p_1 - C) \cdot \frac{1 + p_2}{p_2 - p_1} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{T_2}\right)^2 \cdot (-1) \right| \right] \cdot \frac{D}{A^2 \cdot g} \quad (4.126)$$

Hodnoty dovolených úhlů výkyvu konce lana φ_{dov} [deg] a těžiště břemene ψ_{dov} [deg] se v již zmíněném aproximovaném řešení zadávají do žlutě zvýrazněných buněk C13 a C14. Mezní hodnota zrychlení jeřábové kočky je pak vypočtena v buňce C18 (viz obr. 4.4), která je zvýrazněná zelenou barvou. Soubor s aproximovaným řešením, tj. *soustavaDR-reseni-aprox.xlsx* je k dispozici na příloženém CD.

4.6 Numerické řešení

Numerické řešení diferenciálních rovnic představuje přibližné řešení pomocí vhodné numerické metody.

Pro účely této práce byla v programovacím jazyce Pascal, v grafickém vývojovém prostředí Delphi, naprogramována Dvoukroková metoda řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic. Bližší informace k této aplikované metodě jsou uvedeny v poznámce za vztahem (4.79).

Vlastní řešení je vykonáváno v programu *ROVNICE.exe*, přičemž pro uskutečnění výpočtu je nutno nejprve zadat vstupní hodnoty. Vstupní hodnoty jsou zadávány do souboru *INPUT.txt* a po spuštění souboru *ROVNICE.exe* dojde k výpočtu a vygenerování výsledků do souboru *OUTPUT.txt*. Posledním krokem je načtení výsledků a jejich zkopírování do souboru *soustavaDR-reseni-numer.xlsx*, kde je nutné v listu *Output* tyto hodnoty vložit.

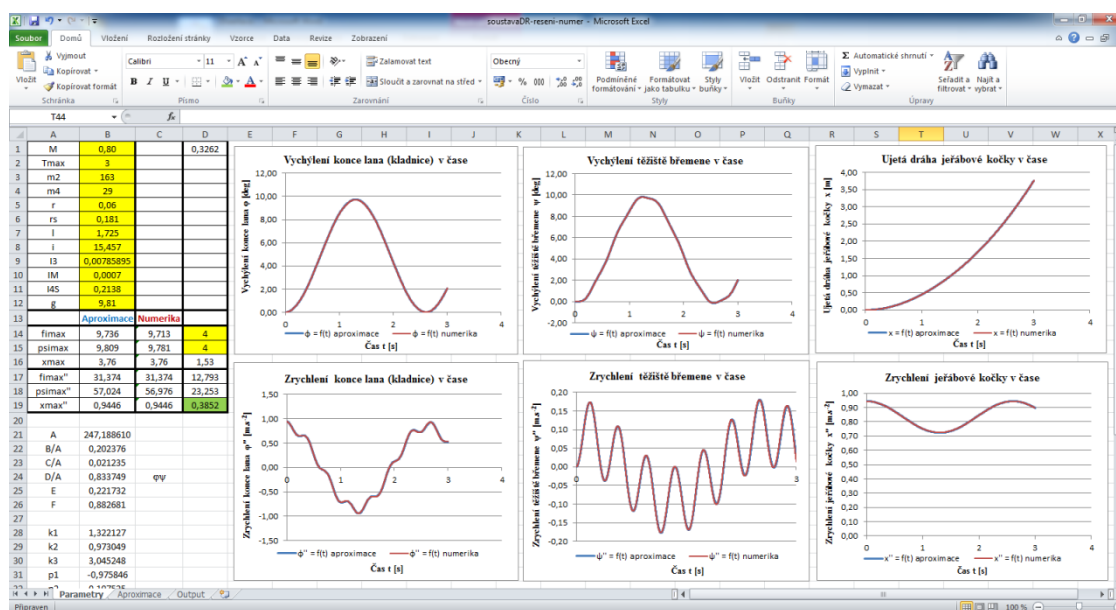
Celý tento algoritmus je popsán v souboru *README.txt*, který obsahuje nápovědu k výše zmíněným operacím. Pokyny uvedené ve zmíněném souboru jsou stěžejní pro správnou funkci programu *ROVNICE.exe*.

Všechny výše zmíněné soubory jsou umístěny ve složce *Rovnice*, která je opět k dispozici na příloženém CD.

4.7 Srovnání aproximovaného a numerického řešení

Soubor *soustavaDR-reseni-numer.xlsx*, který standardně obsahuje aproximované řešení, umožňuje po vložení výsledků ze souboru *OUTPUT.txt* přímé srovnání výsledků aproximovaného a numerického řešení.

Křivky průběhů vykreslované modrou barvou jsou křivky získané na základě aproximovaného řešení, křivky vykreslované červenou barvou jsou získány z řešení numerického (viz obr. 4.5).



Zdroj: Autor

Obr. 4.5 Srovnání aproximovaného a numerického řešení v prostředí MS Excel

Zejména při nižších hodnotách záběrového momentu elektromotoru M [N.m] často nastává situace, kdy soubor vykreslí křivky pouze jednou barvou. To znamená, že jednotlivé výsledky jsou téměř totožné, což svědčí o správnosti a vysoké přesnosti provedených výpočtů.

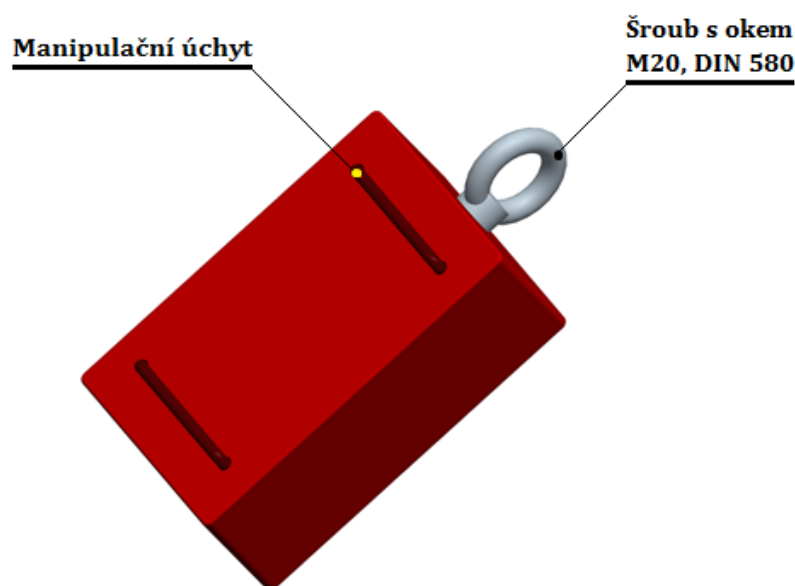
4.8 Teoretické výsledky dle nově přijatého matematického popisu

4.8.1 Volba břemene č. 1

Za účelem ověření správnosti nově zvoleného matematického popisu je vhodné zvolit takové břemeno, které poslouží jednak pro získání teoretických výsledků, jednak pro samotné měření, ze kterého budou získány výsledky skutečné (reálné).

Jak je uvedeno v [1], doba kyvu břemene je závislá na délce odvinutého lana a poměru hmotností kočky a břemene. Čím větší je délka lanového závěsu a čím větší je hmotnost zavěšeného břemene, tím delší bude doba kyvu břemene.

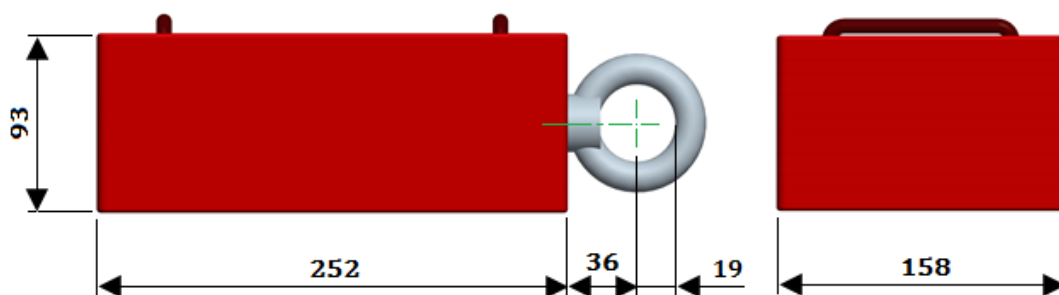
Dále, s ohledem na veličiny vstupující do výpočtu (obr. 4.2), zejména hmotový moment setrvačnosti břemene I_{4s} [kg.m²], je pro účely prvotního ověření správnosti matematického popisu zvoleno břemeno pravidelného geometrického tvaru – kvádr. Toto břemeno (původně závaží) je vybaveno pro usnadnění manipulace dvěma úchyty. V přední části břemene byla vyvrtána díra a posléze vyřezán závit M20 pro našroubování normalizovaného šroubu s okem, prostřednictvím kterého bylo břemeno zavěšeno na jeřábovém háku, viz obr. níže.



Zdroj: Autor

Obr. 4.6 3D model zvoleného břemene

Materiálem zvoleného břemene je konstrukční ocel, hmotnost břemene včetně háku a manipulačních úchytů činí $m_{4k} = 29$ kg. Rozměry břemene, včetně vzdálenosti od hrany oka šroubu k hraně břemene jsou uvedeny na obr. 4.7.

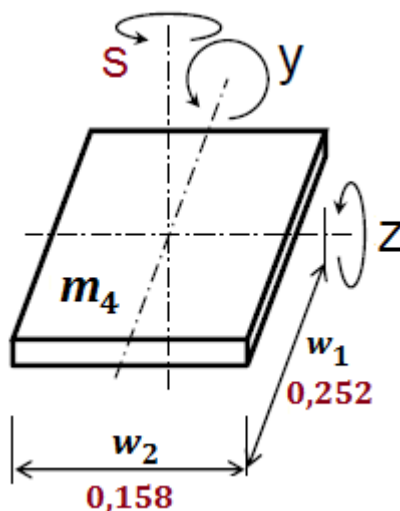


Zdroj: Autor

Obr. 4.7 Hlavní rozměry zvoleného břemene

Pravidelný tvar zvoleného břemene usnadňuje výpočet momentu setrvačnosti, který je nezbytnou veličinou vstupující do výpočtu nového matematického popisu.

Tato veličina jistým způsobem umožňuje popsání tvaru břemene, neboť je-li hmotový moment setrvačnosti obecně definován jako *rozložení hmotnosti tělesa okolo osy rotace*, pak je zřejmé, že při známé hmotnosti břemene m_4 [kg] a známé hodnotě vzdálenosti mezi těžištěm břemene a lanovým závěsem r_s [m] zcela jistě dochází k zohlednění tvarově odlišných těles (břemen).



Zdroj: [12], upraveno autorem

Obr. 4.8 Náhradní schéma k výpočtu momentu setrvačnosti zvoleného břemene

Pro břemeno výše uvedeného tvaru lze, na základě obr. 4.8, s dostatečnou přesností pro výpočet hmotového momentu setrvačnosti k těžišti břemene (osa rotace S) použít dle [12] vztah:

$$I_{4Sk} = \frac{1}{12} \cdot m_{4k} \cdot (w_1^2 + w_2^2) = \frac{1}{12} \cdot 29 \cdot (0,252^2 + 0,158^2) \cong \underline{0,2138 \text{ kg.m}^2} \quad (4.127)$$

Při modelování břemene včetně úchytů a šroubu s okem v prostředí CAD systému Pro/ENGINEER [2] a následném převedení do programu ANSYS Workbench [3] byla zjištěna hodnota momentu setrvačnosti břemene, lišící se až na třetím desetinném čísle vůči hodnotě spočítané ručně, což je více než přijatelné.

Při výpočtu momentu setrvačnosti tvarově složitějších břemen je tedy vhodné, ne-li nutné použít 3D CAD modelování, které zaručuje určení momentu setrvačnosti s vysokou přesností a taktéž rychlostí.

Stanovení hnacího momentu elektromotoru

Vzhledem k tomu, že nový matematický popis neuvažuje pasivní odpory působící proti pojiždění jeřábové kočky, je nutné vypočítat skutečnou hodnotu krouticího momentu M_m [N.m], která je dána rozdílem záběrového momentu elektromotoru pojezdu kočky M [N.m] a již zmíněného momentu pasivních odporů M_{st} [N.m] a inerčního momentu posuvných hmot M_{ip} [N.m] a rotačních hmot M_{ir} [N.m].

Krouticí moment M_m [N.m] je možné vyjádřit z momentové rovnice (4.128):

$$M_m = M - M_{st} - M_{ip} - M_{ir} \quad (4.128)$$

A po dosazení do momentové rovnice dostáváme:

$$M_m = M - \frac{W_t \cdot r}{i \cdot \eta_C} - \frac{F_{ip} \cdot r}{i \cdot \eta_C} - 1,3 \cdot I_M \cdot \varepsilon_M \quad (4.129)$$

kde: W_t [N] – pojezdový odpor,

$$W_t = \frac{(m_2 + m_{4k}) \cdot g}{r} \cdot (e_t + f_\varepsilon \cdot r_\varepsilon) \cdot \chi \quad (4.130)$$

$$W_t = \frac{(163 + 29) \cdot 9,81}{0,06} \cdot (7 \cdot 10^{-4} + 0,1 \cdot 0,011) \cdot 2,5 = \underline{141,264} \text{ N}$$

F_{ip} [N] – inerční síla posuvných hmot působící na obvodu pojezd. kola,

$$F_{ip} = (m_2 + m_{4k}) \cdot \frac{v_p}{60 \cdot t_r} = (163 + 29) \cdot \frac{20}{60 \cdot 0,7} = \underline{91,429} \text{ N} \quad (4.131)$$

ε_M [rad.s⁻²] – úhlové zrychlení hřídele elektromotoru,

$$\varepsilon_M = \frac{\omega_M}{t_r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n_M}{60 \cdot t_r} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 820}{60 \cdot 0,7} = \underline{122,672} \text{ rad.s}^{-2} \quad (4.132)$$

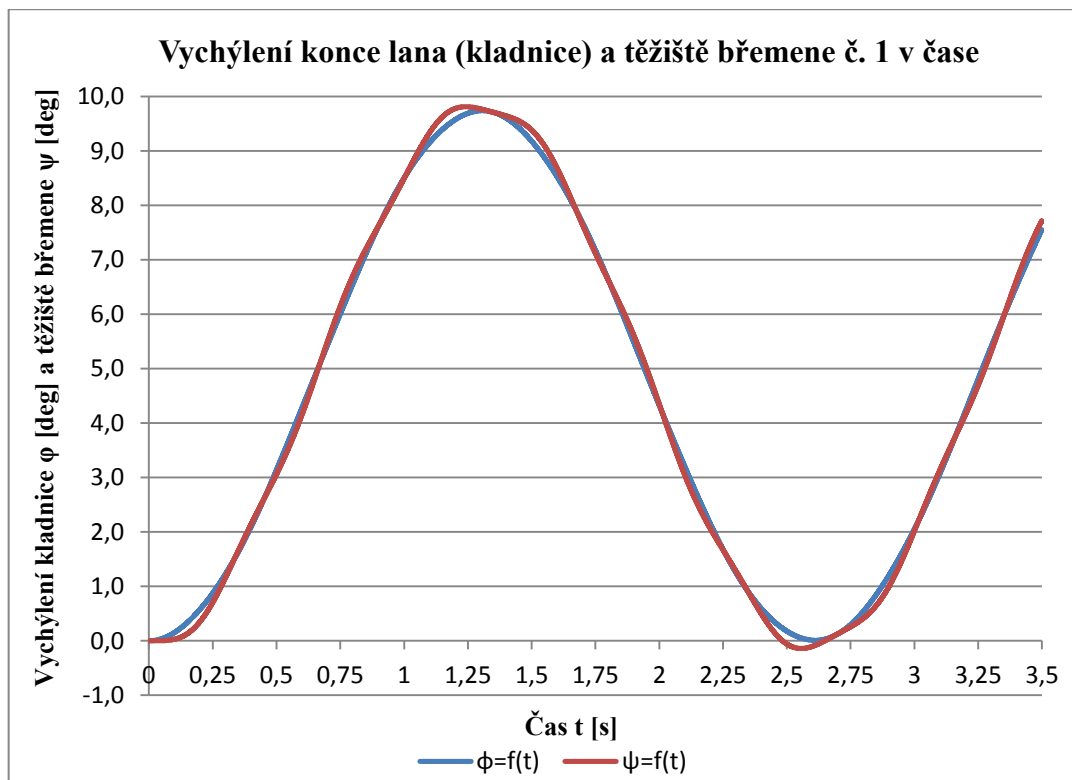
χ [-] – součinitel přídatných odporů, dle [14] je zvolen $\chi = 2,5$.

Po dosazení do rovnice (4.129) dostáváme:

$$M_m = 1,863 - \frac{141,264 \cdot 0,06}{15,457 \cdot 0,95} - \frac{91,429 \cdot 0,06}{15,457 \cdot 0,95} - 1,3 \cdot 0,0007 \cdot 122,672 = \underline{0,8} \text{ N.m} \quad (4.133)$$

4.8.2 Teoretické výsledky pro kmitání břemene č. 1, analýza výsledků

Na základě hodnot vstupních veličin popsanych v tab. 4.1 a dle hodnot břemene popsanych výše, byly prostřednictvím aproximovaného řešení získány pro délku odvinutého lana $l = 1,725$ m a vzdálenost $r_S = 0,181$ m časové závislosti uvedené na obr. 4.9 až obr. 4.13.

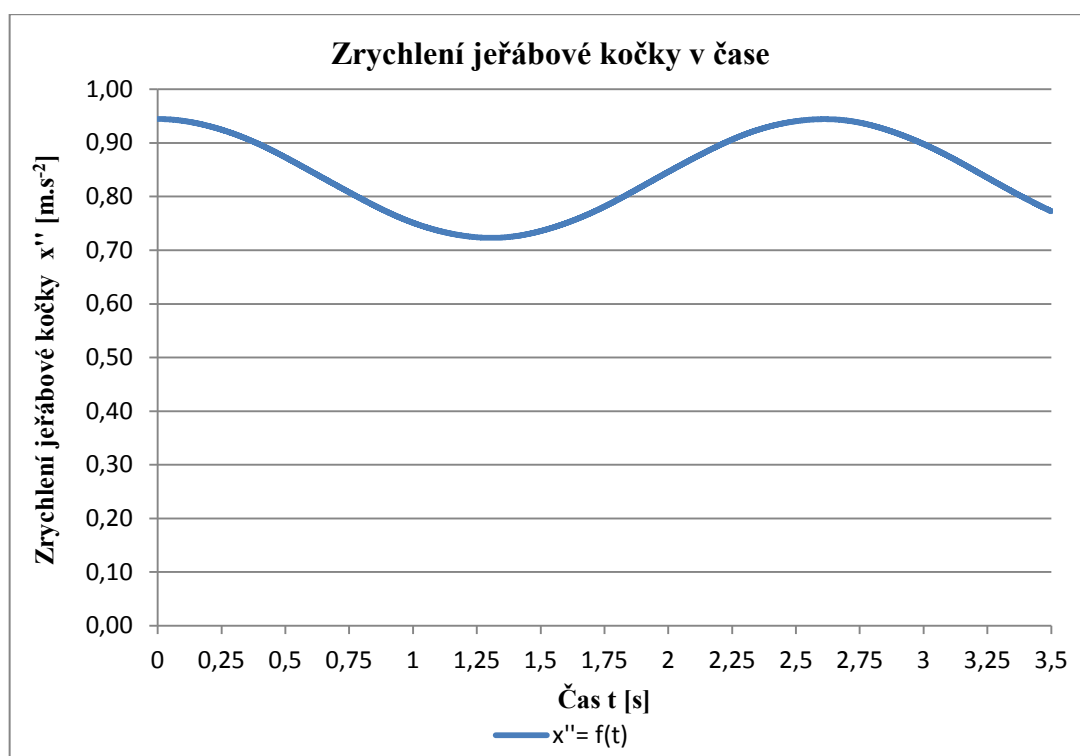


Zdroj: Autor

Obr. 4.9 Vychýlení lanového závěsu a těžiště břemene č. 1 v čase

Na tomto místě je vhodné podotknout, že graf na obr. 4.9 potvrzuje správnost předpokladu uvedeného v kap. 4, třetím odstavci, že břemeno v krajní poloze „překmitne“ konec lana, resp. kladnici, a tudíž nabude větší hodnoty vychýlení. Zajímavý je také průběh výkyvu v první čtvrtině sekundy, kdy je již lano unášeno rozjíždějící se kočkou, zatímco břemeno je pořád ještě v klidu. Poté dojde k srovnání hodnot vychýlení a v úseku mezi půl vteřinou a vteřinou na časové ose obr. 4.9 dochází k situaci, kdy břemeno střídavě překmitává lano a naopak.

Graf vychýlení konce lana a těžiště břemene v čase, stejně jako následující grafy, jsou získány z aproximovaného řešení. Grafické průběhy získané z řešení numerického zde nejsou uváděny, neboť konkrétně v tomto případě jsou průběhy jak vychýlení, tak zrychlení natolik shodné, že při vykreslení by byl rozdíl zanedbatelný.



Zdroj: Autor

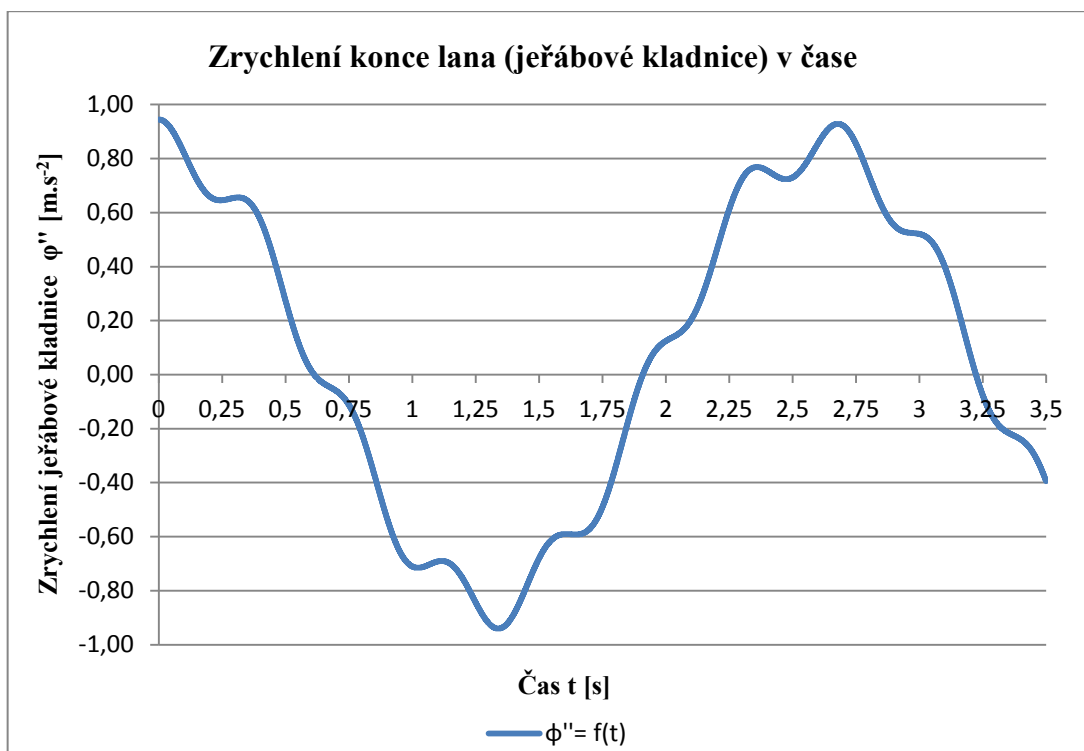
Obr. 4.10 Zrychlení jeřábové kočky v čase

Neméně zajímavým průběhem je průběh zrychlení jeřábové kočky. Navzdory momentové charakteristice třířázového asynchronního elektromotoru překvapuje periodický průběh, který je dán pohybem břemene zavěšeného na laně, které při svém kmitavém pohybu v krajních polohách „strhává“ či „urychluje“ jeřábovou kočku. Z řešení pohybových rovnic vyplývá, že čím je větší hmotnost břemene, tím větší je pokles zrychlení a naopak.

Zrychlení konce lana, resp. jeřábové kladnice a zrychlení těžiště břemene, které bylo v předchozích matematických popisech uvažováno jako shodné, je dle srovnání průběhu z obr. 4.11 a obr. 4.12 dosti odlišné a to jak hodnotami, tak průběhy.

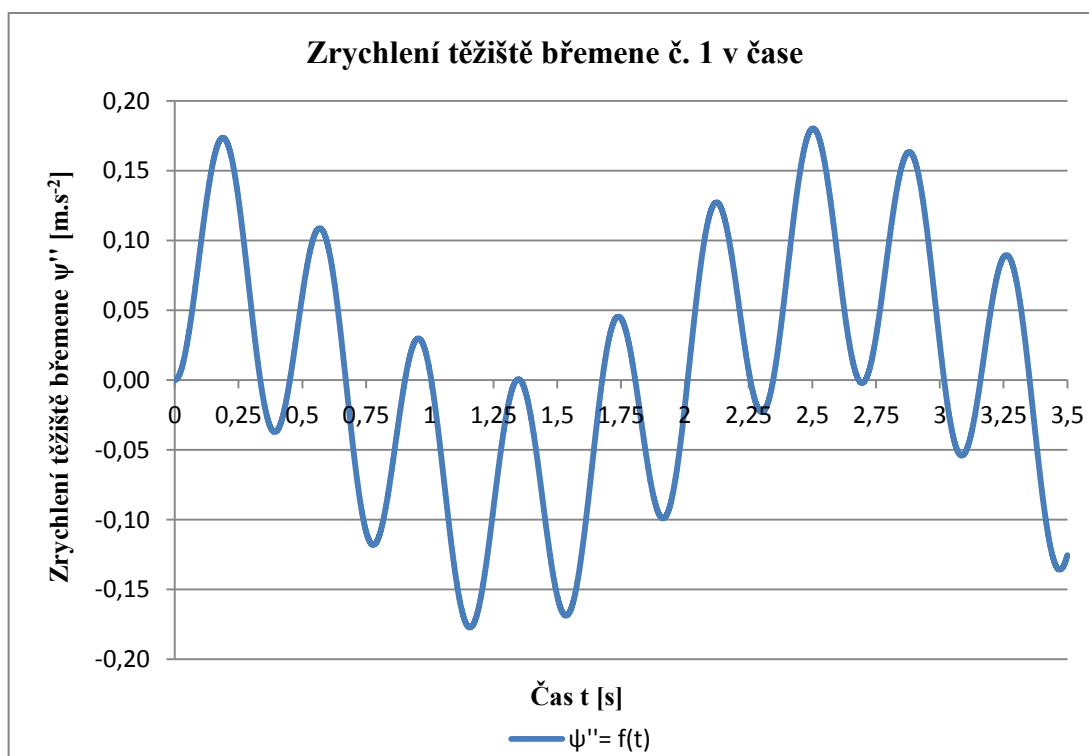
Zatímco hodnota největšího zrychlení jeřábové kladnice by v tomto případě byla stejná i při jiné délce odvinutého lana – měnil by se pouze průběh zrychlení, resp. časový interval periody kosinusoidy, zrychlení těžiště břemene je zcela odlišné. S narůstající délkou odvinutého lana zrychlení klesá, se snižující délkou lana naopak roste. Změna vzdálenosti těžiště břemene od jeřábového háku má na zrychlení těžiště břemene vliv zcela opačný.

Co se týče přímého srovnání průběhů zrychlení jeřábové kladnice a těžiště břemene, je zcela zřejmé, že zavěšené břemeno kmitá zcela jinak – můžeme říci, že „nezávisle.“



Zdroj: Autor

Obr. 4.11 Zrychlení konce lana v čase

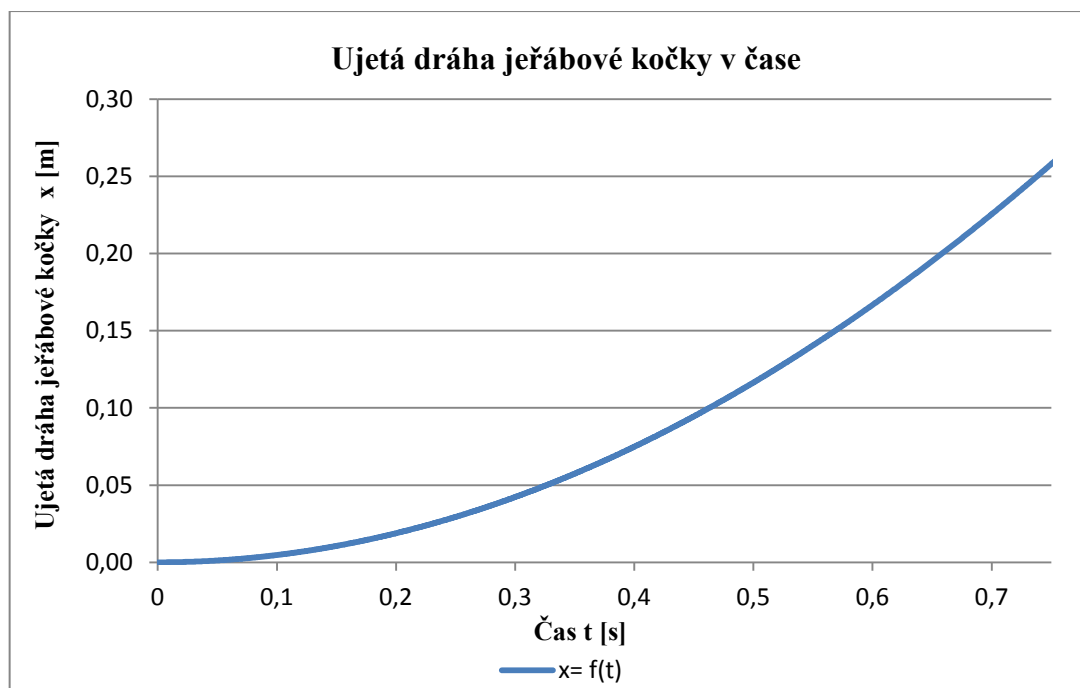


Zdroj: Autor

Obr. 4.12 Zrychlení těžiště břemene č. 1 v čase

„Nezávislostí“ je myšleno odlišné zrychlení spočívající v několika kmitech břemene na jeden kmit jeřábové kladnice, přičemž počet těchto kmitů je závislý především na hmotnosti břemene m_4 [kg] a na hmotovém momentu setrvačnosti I_{4S} [kg.m²], nezanedbatelný je rovněž vliv vzdálenosti od těžiště břemene k jeřábovému háku r_S [m].

Posledním grafem je ujetá vzdálenost jeřábové kočky v čase. Tuto veličinu je však nutno sledovat jen po uvažované dobu rozběhu elektromotoru pojezdu kočky t_r [s] a to s ohledem na její průběh.



Zdroj: Autor

Obr. 4.13 Ujetá dráha jeřábové kočky v čase pro břemeno č. 1

V tab. 4.2 jsou pro úplnost uvedeny maximální hodnoty výkyvu a zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene č. 1.

Tab. 4.2 Hodnoty max. vychýlení a zrychlení sledovaných veličin

Uvažovaná část	DOF	Aproximované řešení		Numerické řešení	
		Max. vychýlení	Max. zrychlení	Max. vychýlení	Max. zrychlení
		[deg]	[m.s ⁻²]	[deg]	[m.s ⁻²]
Jeřábová kočka	x	-	0,9446	-	0,9446
Jeřábová kladnice	φ	9,736	±0,9446	9,713	±0,9446
Těžiště břemene	ψ	9,809	±0,1801	9,781	±0,1799

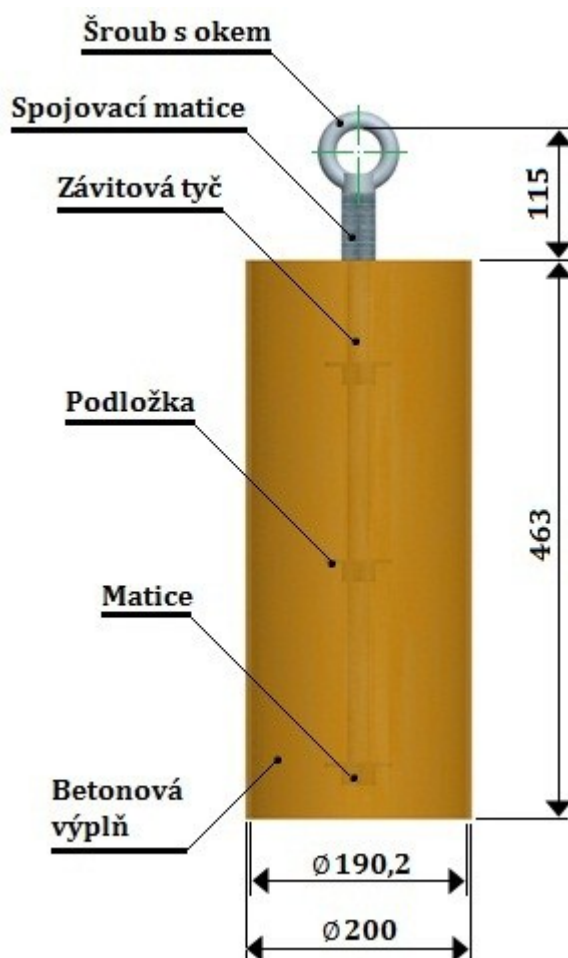
Zdroj: Autor

4.8.3 Volba břemene č. 2

Jako další zkušební břemeno bylo zvoleno těleso s rotačně symetrickým tvarem, kde jeden z rozměrů (délka) výrazně převyšuje druhý rozměr (průměr). Jedná se o betonový válec, jehož pravidelný válcový tvar je dosažen vnějším opláštěním – PVC trubicí.

Břemeno, tj. betonový válec, je vlastní výroby. Jeho středem je vedena závitová tyč M20 s několika maticemi, na kterých jsou uloženy podložky třínásobného průměru, které zabraňují eventuálnímu vyklouznutí závitové tyče z jemnozrnného betonu s garantovanou zrnitostí kameniva (pro přesnější určení měrné hmotnosti betonu). Na horním konci závitové tyče je našroubována spojovací matice, která spojuje závitovou tyč a šroub s okem. Rozměry a konstrukční provedení břemene jsou uvedeny na obr. 4.14.

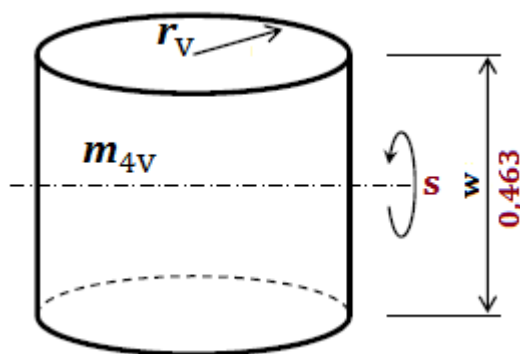
Hmotnost betonového válce, resp. válcového břemene činí $m_{4v} = 30,5 \text{ kg}$, vzdálenost mezi osou oka šroubu a hrany podstavy válce je volena 96 mm.



Zdroj: Autor

Obr. 4.14 Tvar a rozměry válcového břemene

Břemeno válcového tvaru zavěšené na jeřábovém háku bude při rozjezdu „rotovat“ kolem osy s , jak ukazuje obr. 4.15.



Zdroj: [12], upraveno autorem

Obr. 4.15 Náhradní schéma k výpočtu momentu setrvačnosti zvoleného břemene

Hmotový moment setrvačnosti válcového břemene k ose procházející těžištěm je dle [12] dán vztahem:

$$I_{4sv} = \frac{1}{4} \cdot m_{4v} \cdot \left(r_v^2 + \frac{1}{3} \cdot w^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot 30,5 \cdot \left(0,1^2 + \frac{1}{3} \cdot 0,463^2 \right) = \underline{0,6211 \text{ kg.m}^2} \quad (4.134)$$

Stanovení hnacího momentu elektromotoru

Podobně jako v případě břemene č. 1 je nutno stanovit skutečnou hodnotu krouticího momentu M_m [N.m], poněvadž břemeno č. 2 má vyšší hmotnost a tudíž bude odlišný jak moment pasivních odporů, tak inerční moment posuvných hmot.

Krouticí moment M_m [N.m] je možné vyjádřit z momentové rovnice (4.135):

$$M_m = M - M_{st} - M_{ip} - M_{ir} \quad (4.135)$$

A po dosazení do momentové rovnice dostáváme:

$$M_m = M - \frac{W_t \cdot r}{i \cdot \eta_C} - \frac{F_{ip} \cdot r}{i \cdot \eta_C} - 1,3 \cdot I_M \cdot \varepsilon_M \quad (4.136)$$

kde: W_t [N] – pojezdový odpor,

$$W_t = \frac{(m_2 + m_{4v}) \cdot g}{r} \cdot (e_t + f_{\tilde{c}} \cdot r_{\tilde{c}}) \cdot \chi \quad (4.137)$$

$$W_t = \frac{(163 + 30,5) \cdot 9,81}{0,06} \cdot (7 \cdot 10^{-4} + 0,1 \cdot 0,011) \cdot 2,5 = \underline{142,368 \text{ N}}$$

F_{ip} [N] – inerční síla posuvných hmot působící na obvodu pojezd. kola,

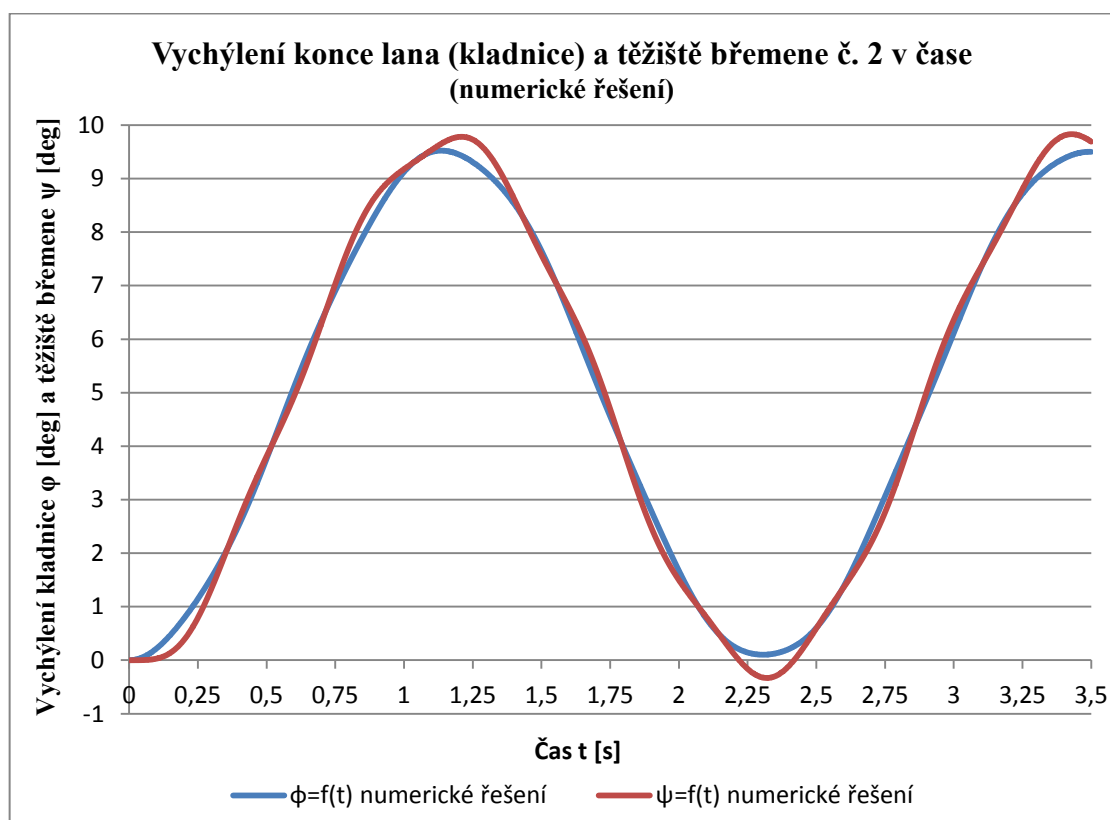
$$F_{ip} = (m_2 + m_{4v}) \cdot \frac{v_p}{60 \cdot t_r} = (163 + 30,5) \cdot \frac{20}{60 \cdot 0,7} = \underline{92,143 \text{ N}} \quad (4.138)$$

Po dosazení do rovnice (4.136) dostáváme:

$$M_m = 1,863 - \frac{142,368 \cdot 0,06}{15,457 \cdot 0,95} - \frac{92,143 \cdot 0,06}{15,457 \cdot 0,95} - 1,3 \cdot 0,0007 \cdot 122,672 = \underline{0,792 \text{ N}} \quad (4.139)$$

4.8.4 Teoretické výsledky pro kmitání břemene č. 2, analýza výsledků

Na základě hodnot vstupních veličin popsanych v tab. 4.1 a dle hmotových vlastností břemene (výše popsanych) byly prostřednictvím aproximovaného a také numerického řešení získány pro délku odvinutého lana $l = 1,155 \text{ m}$ a vzdálenost $r_s = 0,3465 \text{ m}$ časové závislosti uvedené na obr. 4.16 až obr. 4.20.

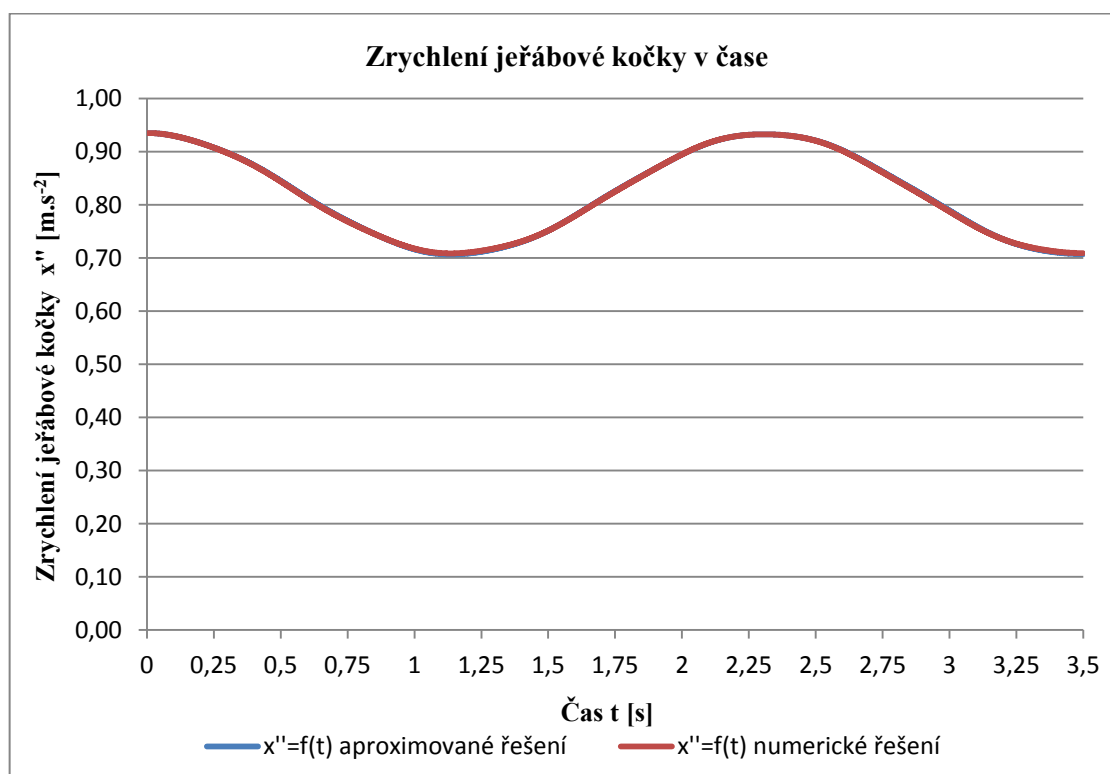


Zdroj: Autor

Obr. 4.16 Vychýlení lanového závěsu a těžiště břemene č. 2 v čase

Rovněž i v tomto případě překmitne břemeno v krajní poloze jeřábový hák, resp. konec lana. Z obr. 4.16 je patrné, že pro břemeno válcového tvaru je rozdíl znatelně

vyšší, což je dáno téměř třináásobně vyšší hodnotou hmotového momentu setrvačnosti při téměř shodné hmotnosti. Je tedy zřejmé, že tvar břemene výrazně ovlivňuje jak zrychlení, tak vychýlení břemene.



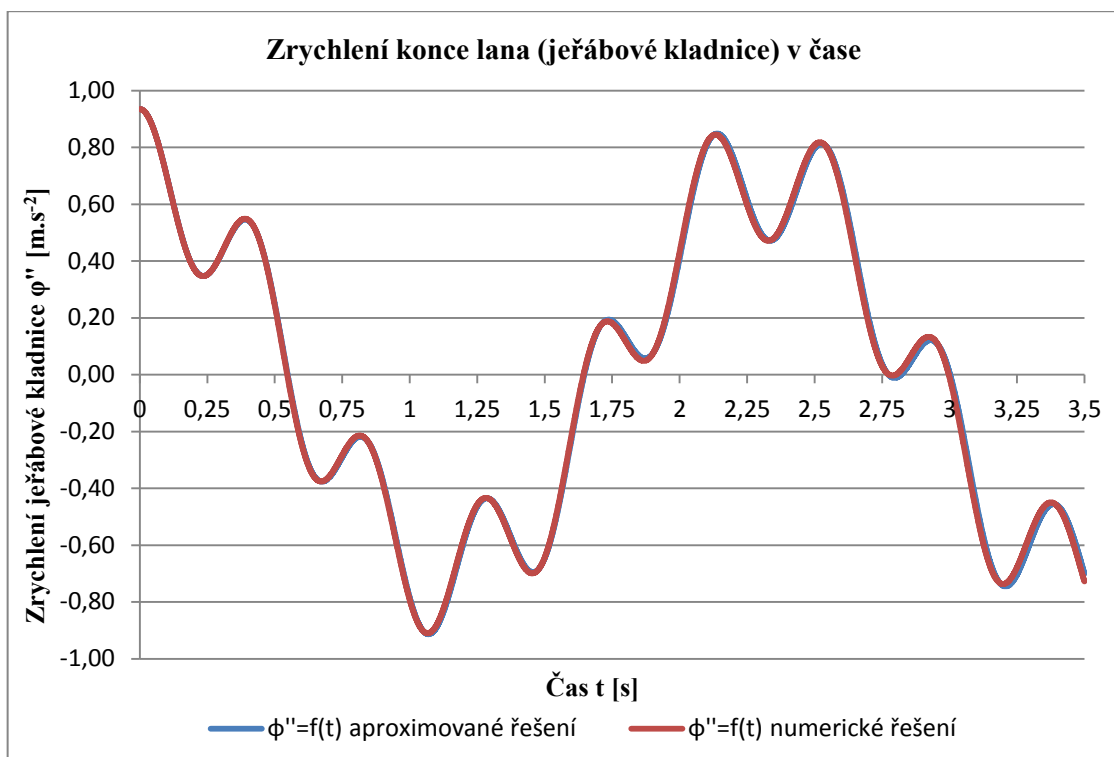
Zdroj: Autor

Obr. 4.17 Zrychlení jeřábové kočky v čase

Rovněž z grafu zrychlení jeřábové kočky v čase je patrné, že vyšší moment setrvačnosti znamená vyšší pokles zrychlení. Jinými slovy, amplituda zrychlení nabývá vyšších hodnot než v případě břemene č. 1, navzdory téměř shodné hmotnosti, avšak odlišného hmotového momentu setrvačnosti.

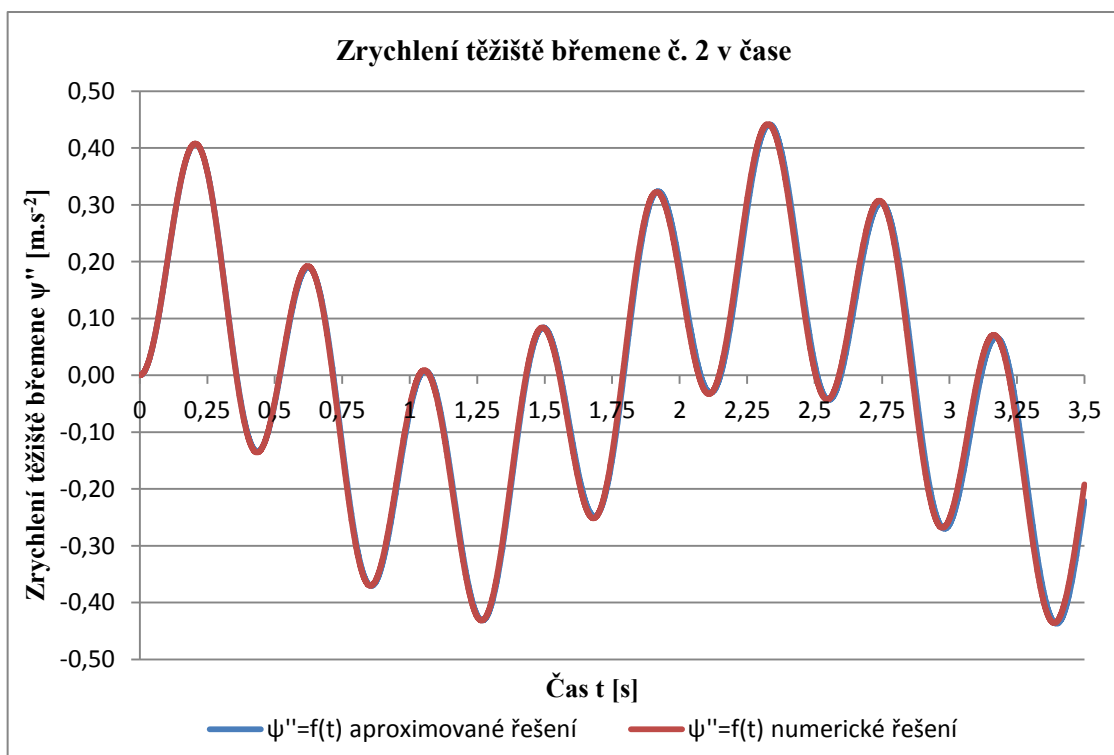
Odlišný tvar břemen a tudíž i odlišný hmotový moment setrvačnosti břemene má rovněž vliv na průběh zrychlení jeřábové kladnice, kdy jednotlivé kmity, ze kterých je složena kosinusoida průběhu zrychlení, nabývají vyšších hodnot než v případě zrychlení kladnice pro břemeno tvaru kvádru, tj. břemeno č. 1, viz obr. 4.18.

Mnohem větší vliv má však tvar břemene na zrychlení samotného břemene, resp. jeho těžiště. Zatímco v případě jeřábové kladnice se mění pouze průběh samotného zrychlení, přičemž maximální a minimální hodnota zůstávají stejné, v případě těžiště břemene sice průběh zůstává na pohled totožný, nicméně nárůst hodnoty zrychlení je téměř 2,5x vyšší, viz obr. 4.19.



Zdroj: Autor

Obr. 4.18 Zrychlení konce lana pro břemeno č. 2 v čase

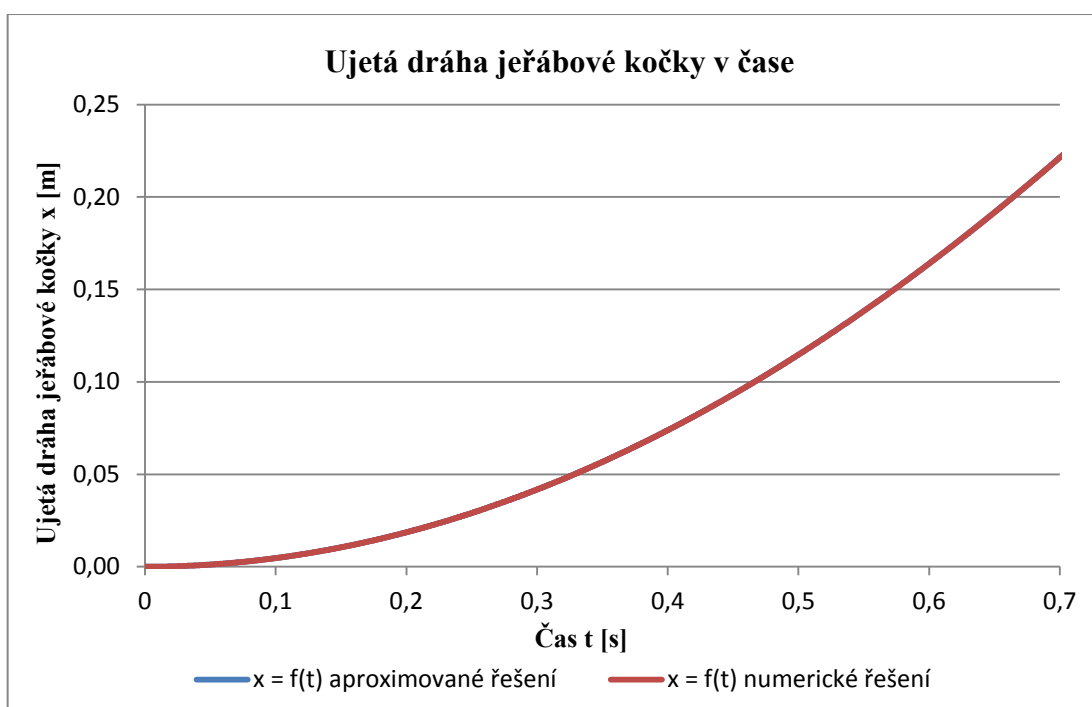


Zdroj: Autor

Obr. 4.19 Zrychlení těžiště břemene č. 2 v čase

V tab. 4.3 jsou pro úplnost uvedeny maximální hodnoty výkyvu a zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene získané z řešení aproximovaného a také řešení numerického.

Jak dokládají zejména hodnoty zrychlení jeřábové kočky a těžiště břemene, jedná se o hodnoty totožné, což s ohledem na velikost úhlů výkyvů kladnice a břemene svědčí o vynikající přesnosti obou způsobů řešení, zejména tedy řešení aproximovaného. Tento fakt je obzvláště příznivý s ohledem na skutečnost, že dosažené úhly vychýlení jak kladnice, tak břemene jsou poněkud vyšší, což je dáno jednak vysokou citlivostí systému, jednak vyšší hodnotou zrychlení jeřábové kočky, u které se v prvotní fázi měření neuvažuje napájení prostřednictvím měniče kmitočtu, jak bude dále upřesněno.



Zdroj: Autor

Obr. 4.20 Ujetá dráha jeřábové kočky v čase pro břemeno č. 2

Tab. 4.3 Hodnoty max. vychýlení a zrychlení sledovaných veličin

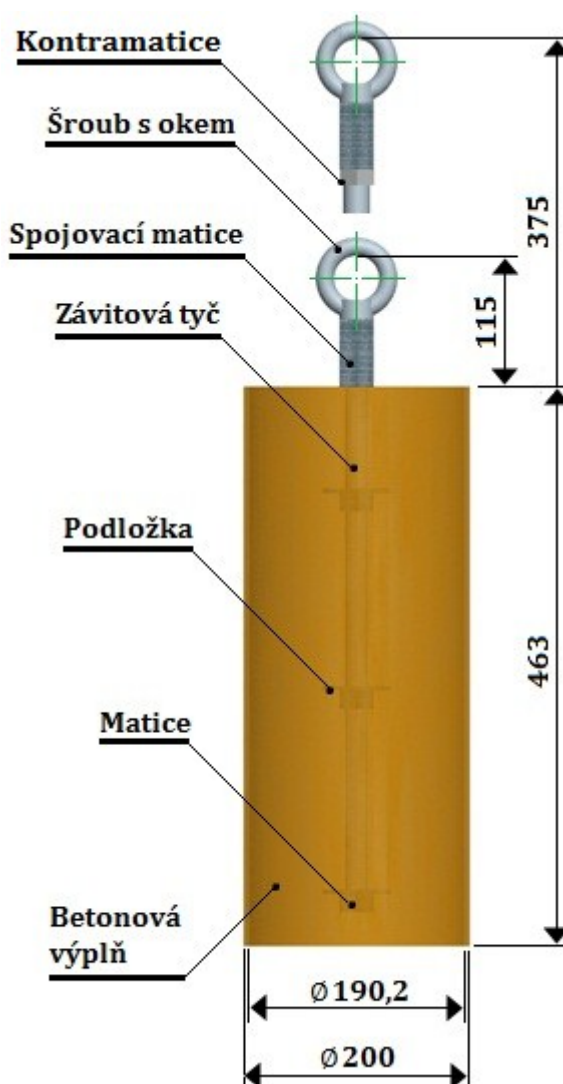
Uvažovaná část	DOF	Aproximované řešení		Numerické řešení	
		Max. vychýlení	Max. zrychlení	Max. vychýlení	Max. zrychlení
		[deg]	[m.s ⁻²]	[deg]	[m.s ⁻²]
Jeřábová kočka	x	-	0,9351	-	0,9351
Jeřábová kladnice	φ	9,546	±0,9351	9,523	±0,9351
Těžiště břemene	ψ	9,862	±0,4416	9,830	±0,4421

Zdroj: Autor

4.8.5 Porovnání kmitání válcového břemene pro různé délky závěsu

Jak již bylo dříve uvedeno, nový matematický popis pohybu kočky s břemenem zohledňuje vzdálenost r_s [m] mezi jeřábovým hákem a těžištěm břemene. Je totiž předpokládáno, že tato vzdálenost r_s [m] je zároveň jakýmsi ramenem, na kterém břemeno během rozjezdu kočky „nezávisle“ kmitá.

Na otázku zdali a jak se při změně vzdálenosti mezi jeřábovým hákem a těžištěm břemene mění vlastní frekvence a doba jednoho kmitu, by mělo dát odpověď následující srovnání kmitání válcového břemene s krátkým a následně delším závěsem.



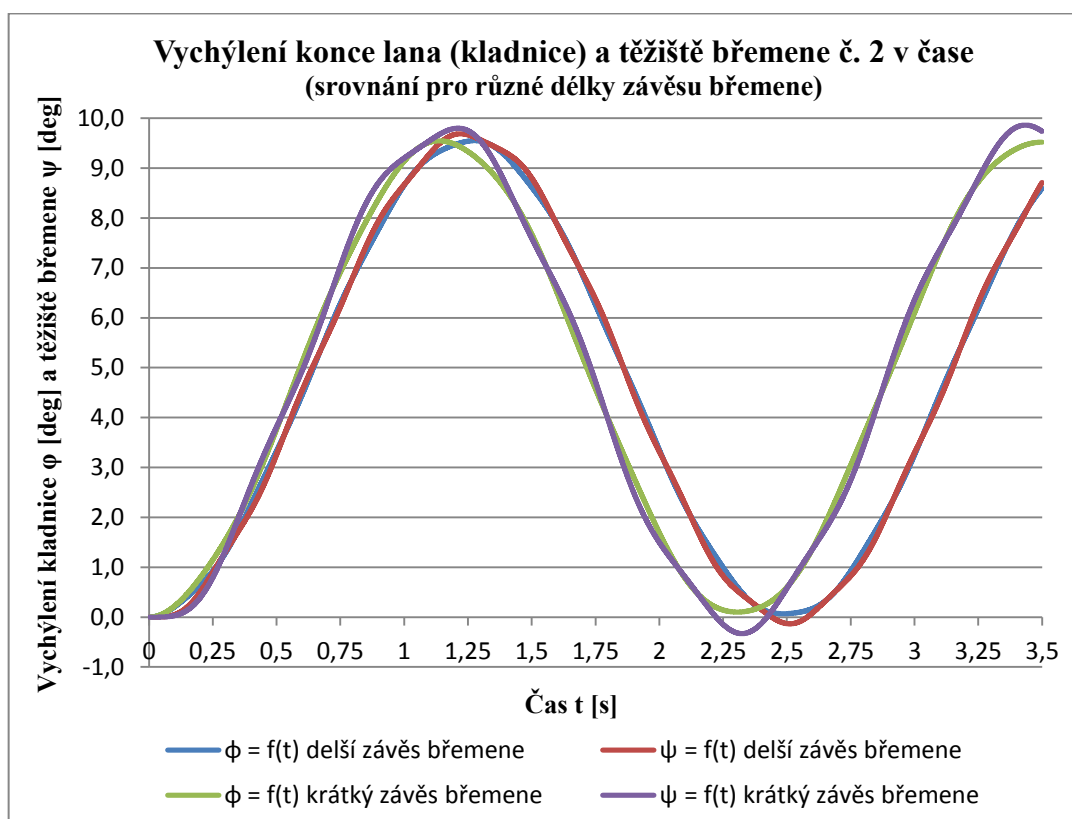
Zdroj: Autor

Obr. 4.21 Břemeno č. 2 s krátkým a dlouhým závěsem – rozměry

Vzhledem k tomu, že se jedná o břemeno č. 2 s modifikovaným závěsem, jehož hmotnost narostla o 0,5 kg, bude zanedbána změna hmotového momentu setrvačnosti, neboť závěs břemene není do momentu setrvačnosti břemene úmyslně zahrnut.

4.8.6 Teoretické výsledky srovnání kmitání břemene s různou délkou závěsu

Na základě hodnot vstupních veličin popsanych v tab. 4.1, kap. 4.3.1 a dle hmotových vlastností břemene výše popsanych byly prostřednictvím aproximovaného řešení získány pro délku odvinutého lana $l = 1,155$ m a vzdálenost $r_{S1} = 0,3465$ m pro krátký závěs a $r_{S2} = 0,6065$ m pro delší závěs břemene časové závislosti uvedené na obr. 4.22 až obr. 4.25.

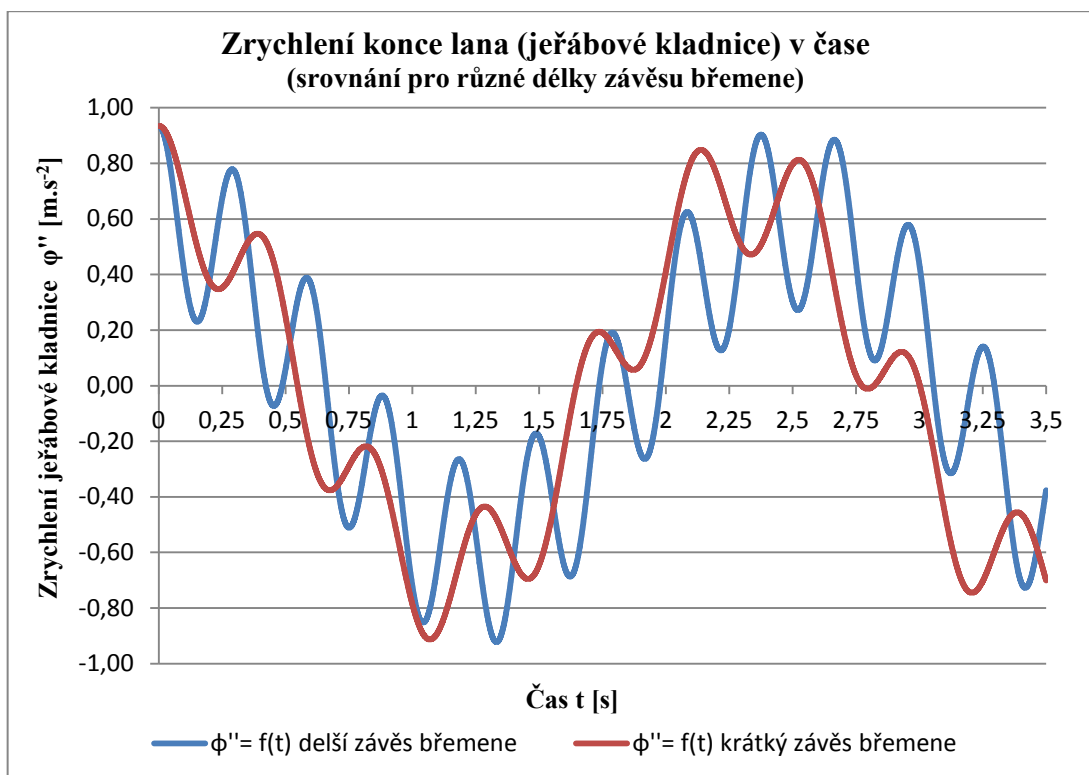


Zdroj: Autor

Obr. 4.22 Vychýlení konce lana a těžiště břemene č. 2 pro různé délky závěsu

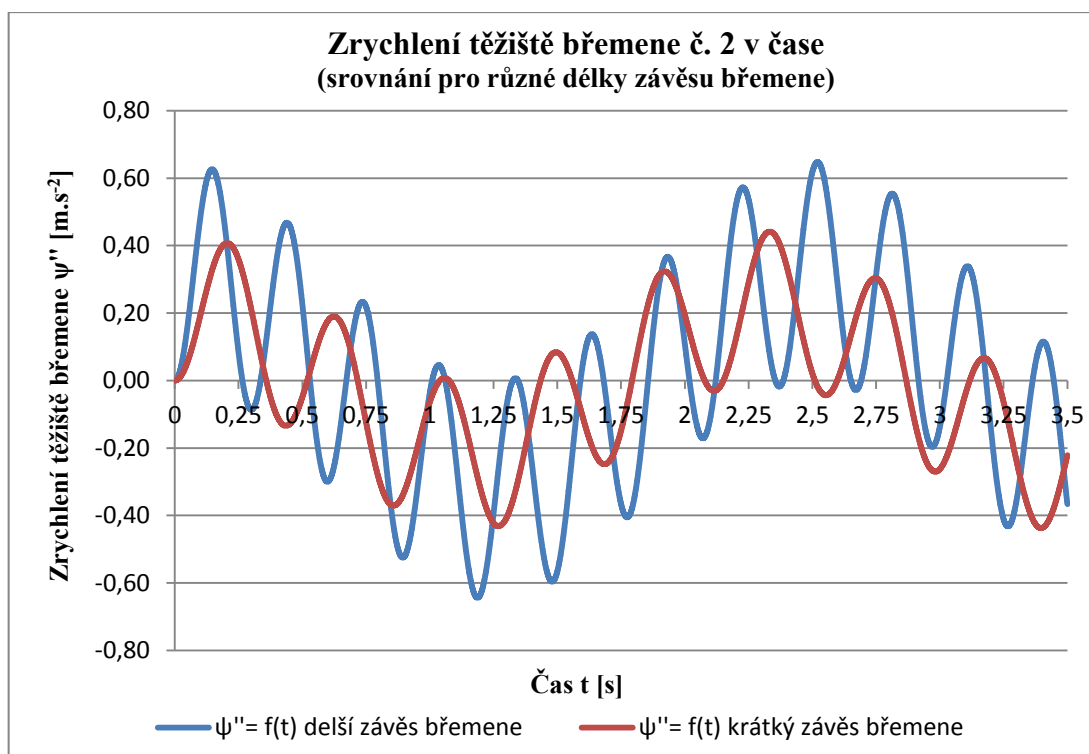
Z průběhu vychýlení kladnice a těžiště břemene č. 2 s krátkým a dlouhým závěsem (obr. 4.22) zaujme skutečnost, že jak kladnice, tak břemeno dosahuje pro obě dvě délky závěsu břemene stejné hodnoty vychýlení. Rozdílná je však doba, za kterou kladnice s břemenem tohoto maximálního vychýlení dosáhnou. Kladnice s břemenem zavěšeným na delším závěsu dosáhne maximálního vychýlení později, než břemeno na krátkém závěsu, přičemž v každé další krajní poloze tento rozdíl narůstá.

Je tedy zřejmé, že hodnota vzdálenosti mezi těžištěm břemene a lanovým závěsem r_s [m] nemá přímý vliv na velikost max. vychýlení, má však vliv na dobu, za kterou dojde k zmíněnému vychýlení. Čím vyšší je hodnota r_s [m], tím déle bude trvat, než dojde k maximálnímu vychýlení jak kladnice, tak zavěšeného břemene.



Zdroj: Autor

Obr. 4.23 Zrychlení konce lana (kladnice) pro různé délky závěsu břemene



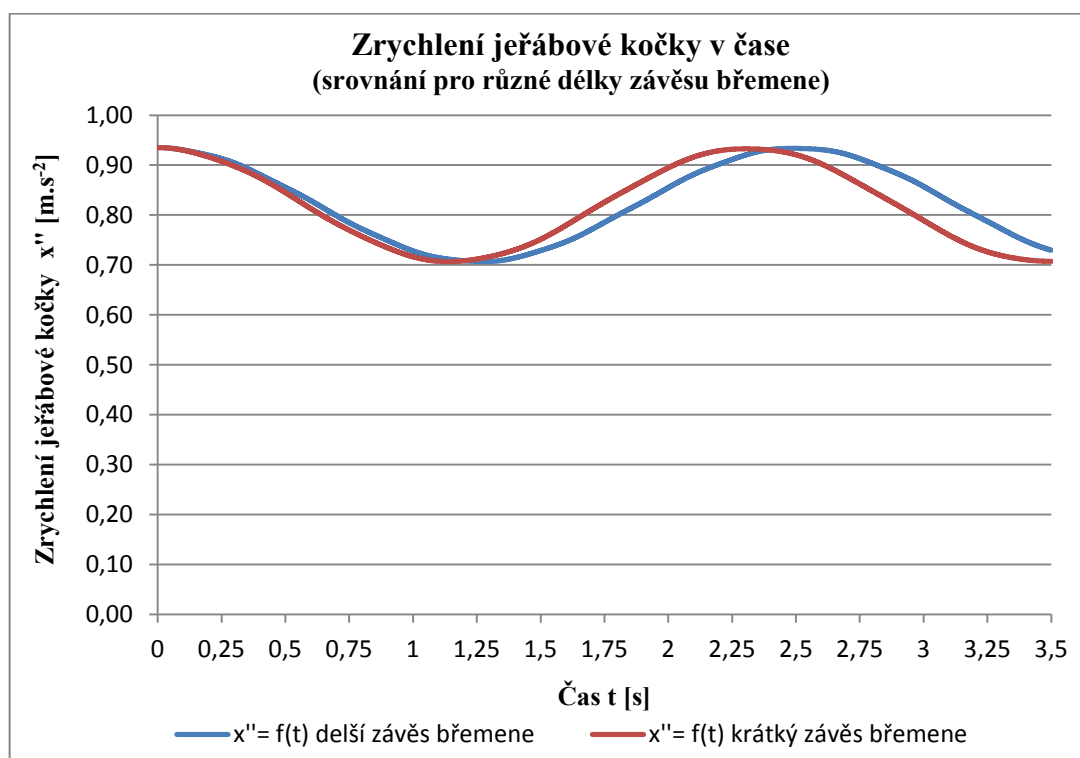
Zdroj: Autor

Obr. 4.24 Zrychlení těžiště břemene č. 2 pro různé délky závěsu břemene

V případě zrychlení kladnice (obr. 4.23) je maximální dosažená hodnota zrychlení stejná pro obě délky závěsu břemene, liší se však průběhy zrychlení. Jednotlivé kmity jsou v případě kratšího závěsu břemene jednak posunuty o určitý časový okamžik, který v čase narůstá. Je tomu tedy naopak než v případě vychýlení kladnice a těžiště břemene.

Je tedy zřejmé, že hodnota vzdálenosti mezi těžištěm břemene a lanovým závěsem r_s [m] má na zrychlení kladnice výrazný vliv. Se zvětšující se délkou závěsu břemene r_s [m] sice dochází k navýšení počtu kmitů během rozjezdu, nicméně, průběh zrychlení je vyrovnanější, bez výrazných (skokových) změn zrychlení.

Co se týče zrychlení těžiště břemene, dalo se očekávat, že právě na zrychlení těžiště břemene se nejvíce projeví vliv rozdílné vzdálenosti mezi těžištěm břemene a lanovým závěsem r_s [m]. Jak ukazuje obr. 4.24, čím větší je hodnota zmiňované vzdálenosti r_s [m], tím větší je zrychlení břemene, stejně jako počet kmitů. Zajímavostí je, že břemeno s delším závěsem dosáhne maximální hodnoty zrychlení dříve než břemeno s krátkým závěsem.



Zdroj: Autor

Obr. 4.25 Zrychlení jeřábové kočky pro různé délky závěsu břemene č. 2

Vzdálenost mezi těžištěm břemene a lanovým závěsem r_s [m] má zcela jistě vliv rovněž na zrychlení jeřábové kočky. Zatímco maximální a minimální hodnoty zrychlení jsou totožné, průběhy zrychlení jsou mírně odlišné.

Na obr. 4.25 je patrný vliv delšího závěsu břemene, kdy zrychlení jeřábové kočky v první vteřině tohoto průběhu klesá pozvolněji než v případě krátkého závěsu břemene, což lze vysvětlit tak, že větší hodnota délky závěsu břemene znamená pozdější „unášení“ tíhy břemene, resp. nejprve je unášen delší závěs, což způsobí rotaci tohoto závěsu a až následně je unášena („stržena“) hmota břemene, která je samozřejmě nesrovnatelně větší, než hmota závěsu.

Čím větší je tedy hodnota vzdálenosti r_s [m], tím pozvolnější je průběh zrychlení jeřábové kočky. Na ujetou dráhu jeřábové kočky x [m] však nemá zmiňovaná vzdálenost žádný vliv.

V tab. 4.4 a v tab. 4.5 jsou uvedeny přehledy max. hodnot vychýlení a zrychlení jeřábové kočky, kladnice a těžiště břemene pro obě dvě délky závěsu a to jak na základě řešení aproximovaného, tak řešení numerického.

Tab. 4.4 Hodnoty max. vychýlení a zrychlení sledovaných veličin – aproximované řešení

Uvažovaná část		Aproximované řešení			
		Krátký závěs břemene		Delší závěs břemene	
		Max. vychýlení	Max. zrychlení	Max. vychýlení	Max. zrychlení
	DOF	[deg]	[m.s ⁻²]	[deg]	[m.s ⁻²]
Jeřábová kočka	x	-	0,9351	-	0,9351
Jeřábová kladnice	φ	9,546	±0,9351	9,550	±0,9351
Těžiště břemene	ψ	9,862	±0,4416	9,688	±0,6478

Zdroj: Autor

Tab. 4.5 Hodnoty max. vychýlení a zrychlení sledovaných veličin – numerické řešení

Uvažovaná část		Numerické řešení			
		Krátký závěs břemene		Delší závěs břemene	
		Max. vychýlení	Max. zrychlení	Max. vychýlení	Max. zrychlení
	DOF	[deg]	[m.s ⁻²]	[deg]	[m.s ⁻²]
Jeřábová kočka	x	-	0,9351	-	0,9351
Jeřábová kladnice	φ	9,523	±0,9351	9,530	±0,9351
Těžiště břemene	ψ	9,830	±0,4421	9,663	±0,6478

Zdroj: Autor

5 STAVBA MĚŘICÍHO PRACOVISTĚ

Měřicí pracoviště je nezbytným prvkem pro realizaci praktické části disertační práce, tj. ověření dané teorie či problematiky, provedení technického experimentu, apod.

Vzhledem k tomu, že měřicí pracoviště do jisté míry nahrazuje reálné zařízení či podmínky (v tomto případě rozjíždějící se mostový jeřáb), je nutno se při jeho návrhu co nejvíce přiblížit reálnému provozu, aby byly získané výsledky věrohodné a zároveň užitečné.

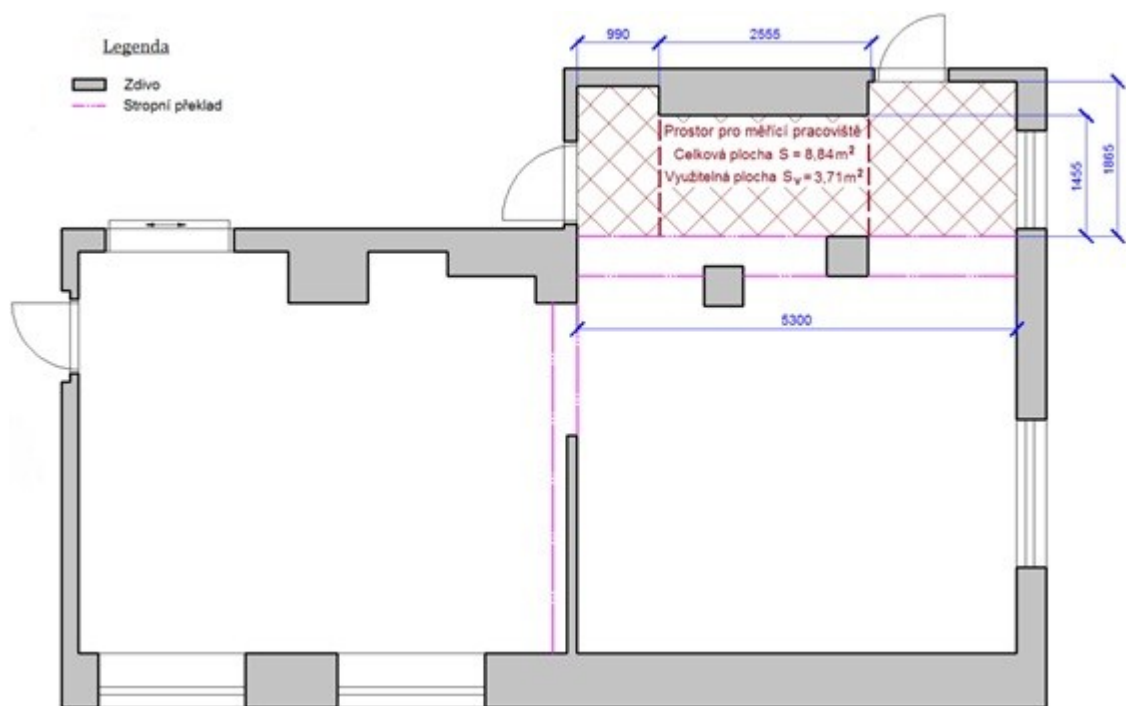
5.1 Návrh měřicího pracoviště

5.1.1 Podmínky a omezení ovlivňující umístění měřicího pracoviště

Základní podmínkou pro měřicí pracoviště sloužící k simulaci stavu kývání břemene při rozjezdu podvěsné jeřábové kočky je maximální možná výška pracoviště a tedy co největší délka odvinutého lana, na jehož konci bude zavěšeno břemeno.

V souladu s tímto požadavkem bylo tedy nutno najít v laboratoři, v níž by měla být ocelová konstrukce měřicího pracoviště umístěna, využitelnou plochu s odpovídající výškou a samozřejmě i dostatečnou šířkou.

Při hledání této plochy byla jako nejvhodnější vybrána plocha zvýrazněná na níže uvedené půdorysné dispozici laboratoře (obr. 5.1), která jednak vyhovuje výškově, jednak je ohraničena sloupy a zejména stropními železobetonovými překlady, které umožňují příčné ukotvení ocelové konstrukce měřicího pracoviště.



Zdroj: Autor

Obr. 5.1 Půdorys laboratoře s vyznačením plochy pro umístění měřicího pracoviště

Jak vyplývá z obr. 5.1, prostor pro měřicí pracoviště je umístěn v místě, ke kterému je ergonomicky dostatečný přístup z několika stran, což však na druhé straně nedovoluje plné využití půdorysné plochy.

Nicméně, vzhledem k výšce stropu v tomto prostoru, která činí $h_s = 3,35$ m a je tedy přesně o 0,25 m vyšší než jiných prostorách laboratoře, se jedná o nejpříjemnější variantu, a tudíž bylo možno přistoupit k vlastnímu návrhu měřicího pracoviště, resp. ocelové konstrukce měřicího pracoviště.

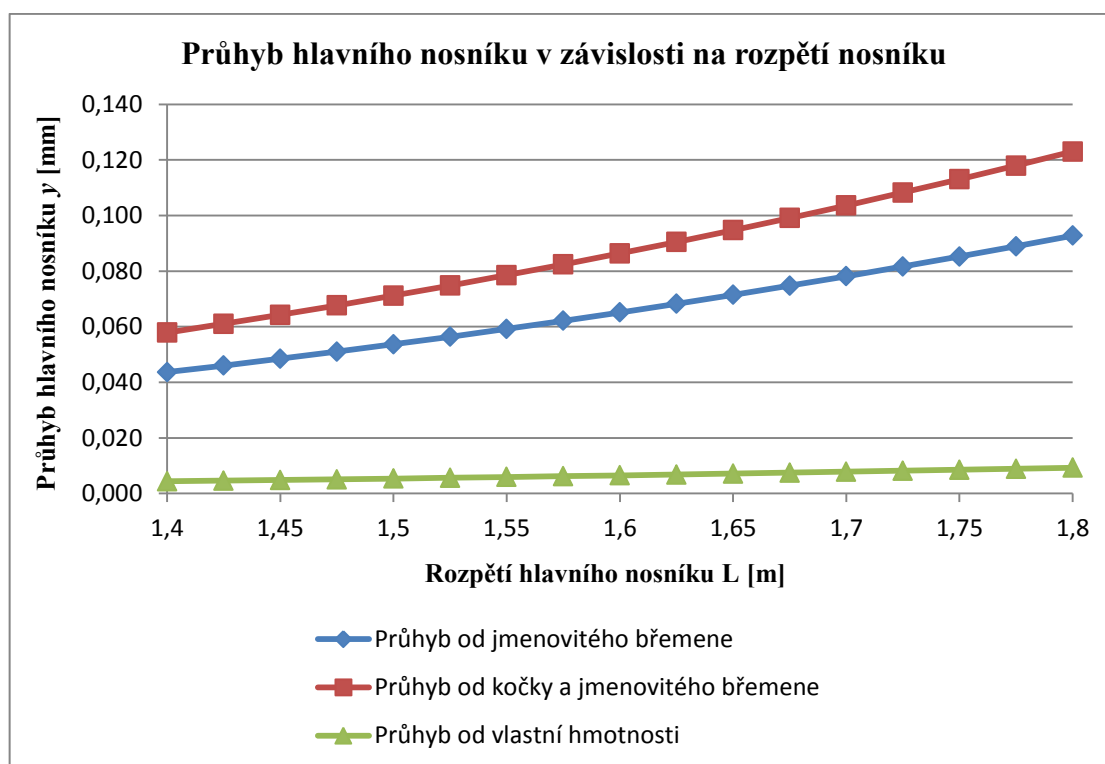
S ohledem na předpokládanou nosnost konstrukce, její vlastní hmotnost a rovněž hmotnost jeřábové kočky bylo nutné provést znalecký posudek, který potvrdil, že únosnost podlah budovy je dostačující.

5.1.2 Podmínky a omezení ovlivňující návrh ocelové konstrukce

Při návrhu ocelové konstrukce bylo vycházeno jednak z již zmíněné maximální možné výšky konstrukce dané výškou stropu, jednak z dovolené šířky. Ta musí být nanejvýše takové hodnoty, aby ocelová konstrukce měřicího pracoviště nezasahovala do vstupních prostor místnosti a byl tak zaručen bezproblémový přístup ke dveřím.

Další omezující podmínkou je tuhost ocelové konstrukce. Při rozběhu jeřábové kočky a následném kývání břemene, stejně jako za klidového stavu by ocelová konstrukce měla mít pouze minimální průhyb, aby nedošlo k ovlivnění měření vlivem nerovnosti (sklonu) jeřábové dráhy.

Kompromisem je tedy volba rozpětí hlavního nosníku – na jedné straně by mělo být co možná nejdelší, aby byl zabezpečen bezproblémový rozjezd kočky na jmenovitou rychlost pojezdu, na druhé straně je rozpětí ve vztahu (5.2) pro průhyb nosníku ve třetí mocnině, což znamená výrazný nárůst průhybu při sebemenším zvýšení rozpětí jeřábu (viz obr. 5.2).



Zdroj: Autor

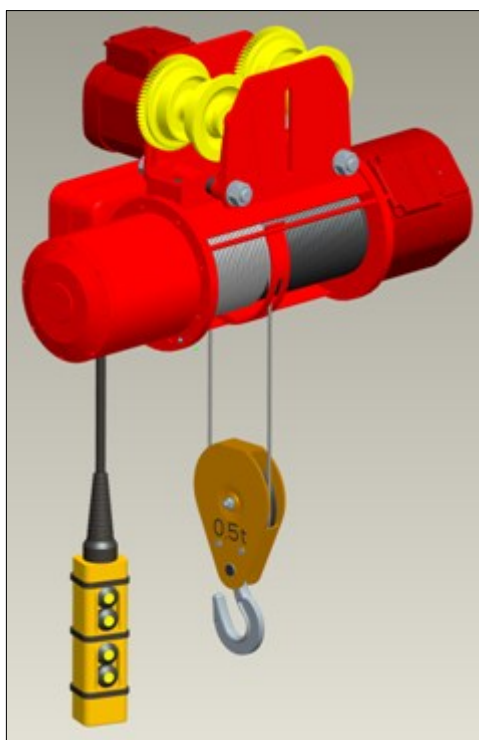
Obr. 5.2 Průhyb hlavního nosníku v závislosti na zvoleném rozpětí nosníku L [m]

S ohledem na výše uvedený graf (obr. 5.2) byla zvolena hodnota rozpětí hlavního nosníku $L = 1,665$ m, které svou velikostí zaručuje jednak bezproblémový rozjezd kočky na požadovanou rychlost za požadovaný čas, jednak by nemělo výrazně ovlivnit tuhost konstrukce.

Poslední omezující podmínkou je požadavek, aby ocelová konstrukce, především tedy stojiny, byly se základním profilem ukotveným do podlahy spojeny rozebíratelným spojením a to zejména z důvodu snazších přepravních podmínek ocelové konstrukce.

5.1.3 Volba jeřábové kočky

Jak již bylo zmíněno v kapitole 4.3.1, s ohledem na řešenou problematiku byl zvolen podvěsný elektrický lanový kladkostroj bulharské společnosti Balkancar, model 13T 10236 M A (viz obr. 5.3), jehož další vlastnosti jsou uvedeny v tab. 5.2.



Zdroj: Autor

Obr. 5.3 3D model podvěsného elektrického kladkostroje Balkancar 13T 10236 M A

Jak vyplývá z obr. 5.3, jedná se o elektrický lanový kladkostroj robustní konstrukce se standardní konstrukční výškou.

Tab. 5.2 Parametry zvolené jeřábové kočky

Jmenovitá nosnost	500	[kg]	Výkon motoru zdvihu	0,15/0,75	[kW]
Zdvih	12	[m]	Výkon motoru pojezdu	0,1	[kW]
Hmotnost kladnice	10	[kg]	Jmenovité otáčky elektromotoru pojezdu	820	[min ⁻¹]
Rychlost mikrozdvihu	1,4	[m.min ⁻¹]	Kmitočet	50	[Hz]
Rychlost zdvihu	8	[m.min ⁻¹]	Elektrické napětí	380	[V]
Rychlost pojezdu	20	[m.min ⁻¹]	Průměr lana	6	[mm]
Vedení lana	2/1	[-]	Rok výroby	1991	

Zdroj: Autor

Zvolená jeřábová kočka může být v případě potřeby napájena z měniče kmitočtu Yaskawa Varispeed VS-606V7, prostřednictvím kterého je možno regulovat rychlost a zrychlení pohonu pojezdu jeřábové kočky.

Použití měniče kmitočtu umožní v budoucnu další zkoumání závislostí mezi zmíněnými veličinami a kmitáním břemene.

Vzhledem k nastavitelné řídicí rampě měniče kmitočtu je možno ověřit pro daný tvar a hmotnost břemene vypočtenou maximální hodnotu zrychlení jeřábové kočky \ddot{x}_{\max} [m.s⁻²], při které by nemělo dojít k překročení normou dovoleného úhlu vychýlení břemene.

5.1.4 Návrh ocelové konstrukce

Dle [9], přílohy VIII., nemá maximální povolený průhyb pro jednonosníkové mostové jeřáby s elektrickým kladkostrojem překročit hodnotu danou vztahem:

$$y = \frac{L}{500} \quad [\text{mm}] \quad (5.1)$$

Vztah pro průhyb nosníku o rozpětí $L = 1,665$ m zatíženého osamělou silou, tj. břemenem $Q = 500$ kg a hmotností jeřábové kočky $m_2 = 163$ kg uprostřed nosníku je dle [10]:

$$y = \frac{(Q + m_2) \cdot g \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_x} \quad [\text{mm}] \quad (5.2)$$

Dosazením výše uvedené podmínky (5.1) do vztahu (5.2) za průhyb získáme potřebný moment setrvačnosti I_x :

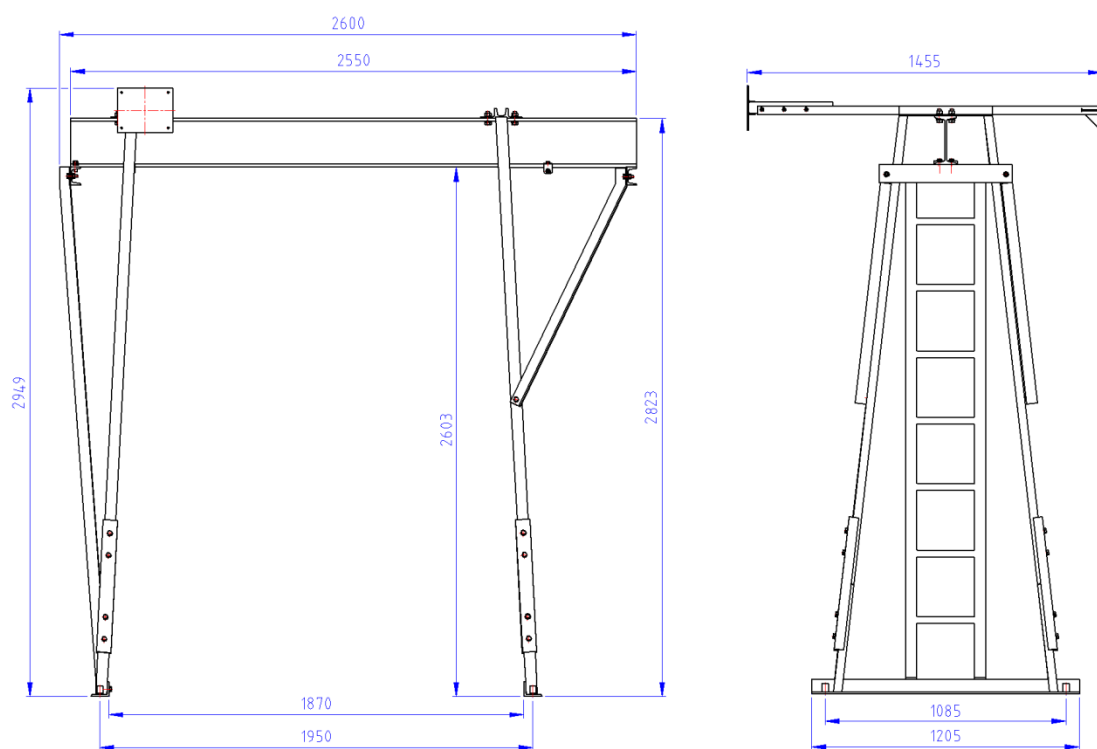
$$I_x = \frac{500 \cdot (Q + m_2) \cdot g \cdot L^2}{48 \cdot E_x} = \frac{500 \cdot (500 + 163) \cdot 9,81 \cdot 1,665^2}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^{11}} = \underline{8,94 \cdot 10^{-7}} \quad [\text{m}^4] \quad (5.3)$$

Vypočtený, minimální moment setrvačnosti je poměrně nízké hodnoty, nicméně podmínka dovoleného průhybu definovaná vztahem (5.1) nezaručuje požadovanou tuhost konstrukce.

Proto byl s ohledem na požadovanou vysokou tuhost konstrukce zvolen jako hlavní nosník symetrický válcovaný profil I 220 a jako stojiny byly zvoleny válcované profily U 50.

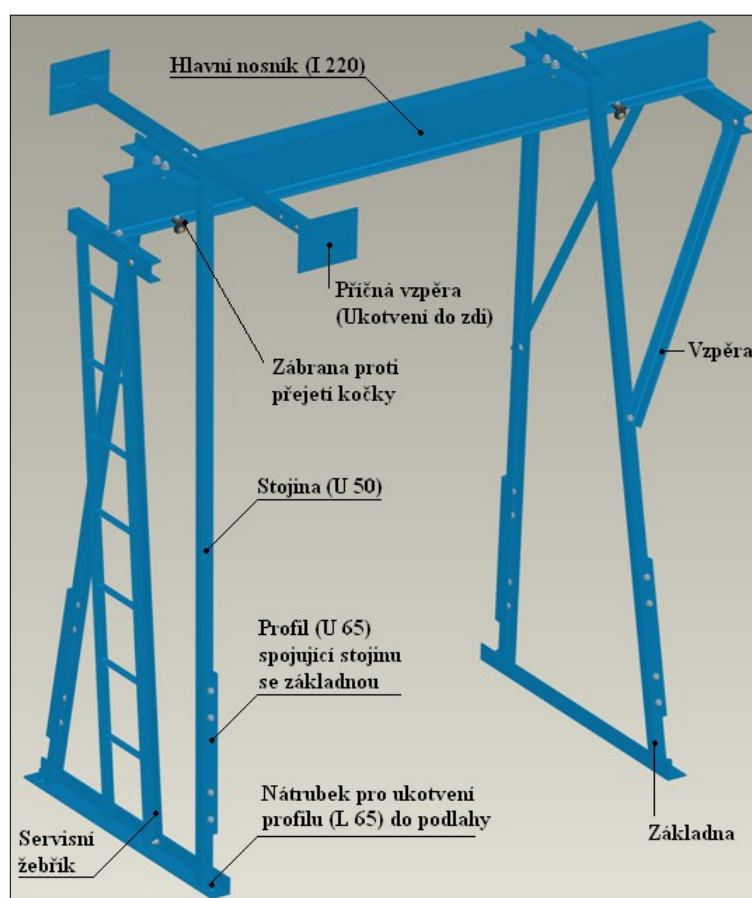
Hlavní nosník je připojen ke stojinám prostřednictvím osmi vysokopevnostních šroubů M16x60 pevnostní třídy 8.8, zatímco spojení stojiny se základnou je realizováno rovněž vysokopevnostními šrouby stejné pevnostní třídy, avšak o rozměru M 12x50.

Veškerá šroubová spojení jsou navržena s vysokou bezpečností, opět z důvodu požadavku vysoké tuhosti a to nejen konstrukce samotné, nýbrž i použitého spojení.



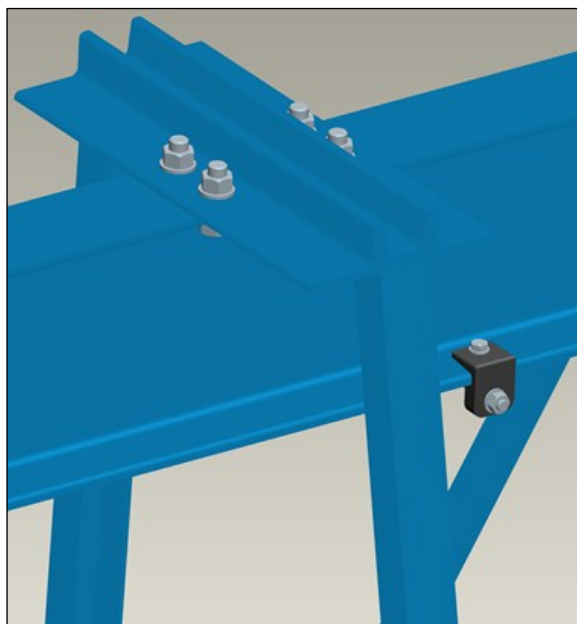
Zdroj: Autor

Obr. 5.4 Hlavní rozměry ocelové konstrukce měřicího pracoviště



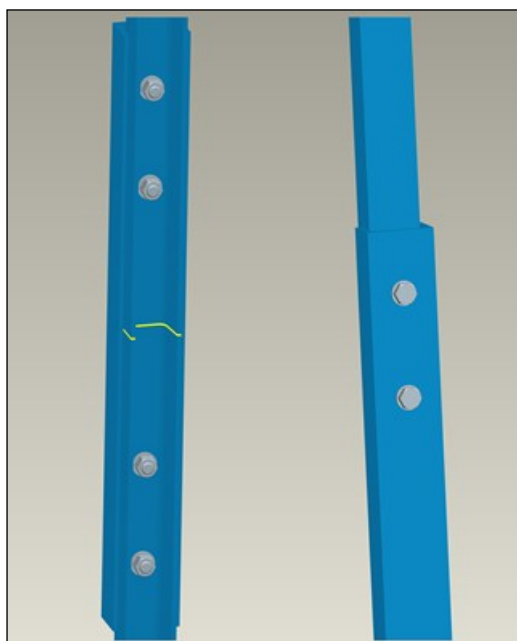
Zdroj: Autor

Obr. 5.5 3D model ocelové konstrukce měřicího pracoviště



Zdroj: Autor

Obr. 5.6 Pohled na připojení hlavního nosníku ke stojinám



Zdroj: Autor

Obr. 5.7 Pohled na rozebíratelné spojení stojin se základnou

Materiálem obou profilů je nelegovaná konstrukční ocel 11 373.0 se zaručenou svařitelností, která má dle [11] výpočtovou pevnost $R_d = 210 \text{ MPa}$.

Tuhost konstrukce dále zvyšují vzpěry a servisní žebřík. Příčné vzpěry zakotvené celkem osmi šrouby do zdi a do stropního překladu zachycují vodorovné boční síly od zrychlujícího kladkostroje.

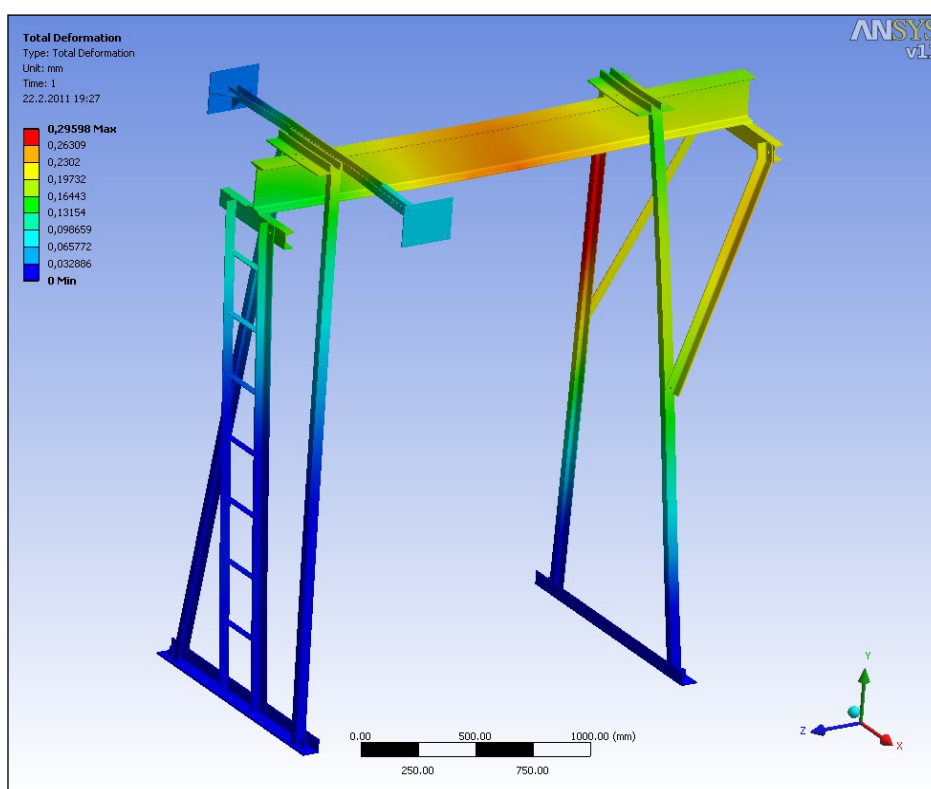
Za povšimnutí stojí již zmíněné řešení rozebíratelného spojení základny a stojin. Z praktických důvodů nebylo možné vyřešit stojinu a základnu jako jeden konstrukční celek. Proto bylo přistoupeno k poněkud specifickému řešení, jež spočívá ve spojení stojiny a základny prostřednictvím přizpůsobeného válcovaného profilu U 65, do kterého zapadnou profily U 50, tj. profily základny a stojiny. Poté následuje spojení těchto profilů vysokopevnostními šrouby. Je předpokládán přenos zatížení tvarovým a silovým stykem.

I přes výše zmíněné konstrukční řešení rozebíratelného spoje základny a stojin je tuhost navržené ocelové konstrukce dostatečně vysoká, o čemž nejlépe vypovídá výpočet pomocí MKP uvedený v následující kapitole.

5.1.5 Výpočet ocelové konstrukce pomocí MKP

Ocelová konstrukce byla navržena ve 3D parametrickém CAD systému Pro/ENGINEER Wildfire 2.0, který umožňuje pomocí funkce *Surface Region* v režimu Pro/MECHANICA vytvořit dílčí plochy (regiony), na něž budou zadány okrajové podmínky, konkrétně kolové tlaky jeřábové kočky – vzhledem k tomu, že pojezdová kola elektrického podvěsného kladkostroje jsou kónická, jedná se o přímkový dotyk. Je vhodné podotknout, že právě zadávání okrajových podmínek bez výrazně zjednodušujících předpokladů je nutností pro dosažení správných a věrohodných výsledků.

Výpočet ocelové konstrukce prostřednictvím MKP byl proveden v programu ANSYS Workbench v11, přičemž bylo využito exportu z prostředí již zmíněného programu Pro/ENGINEER.

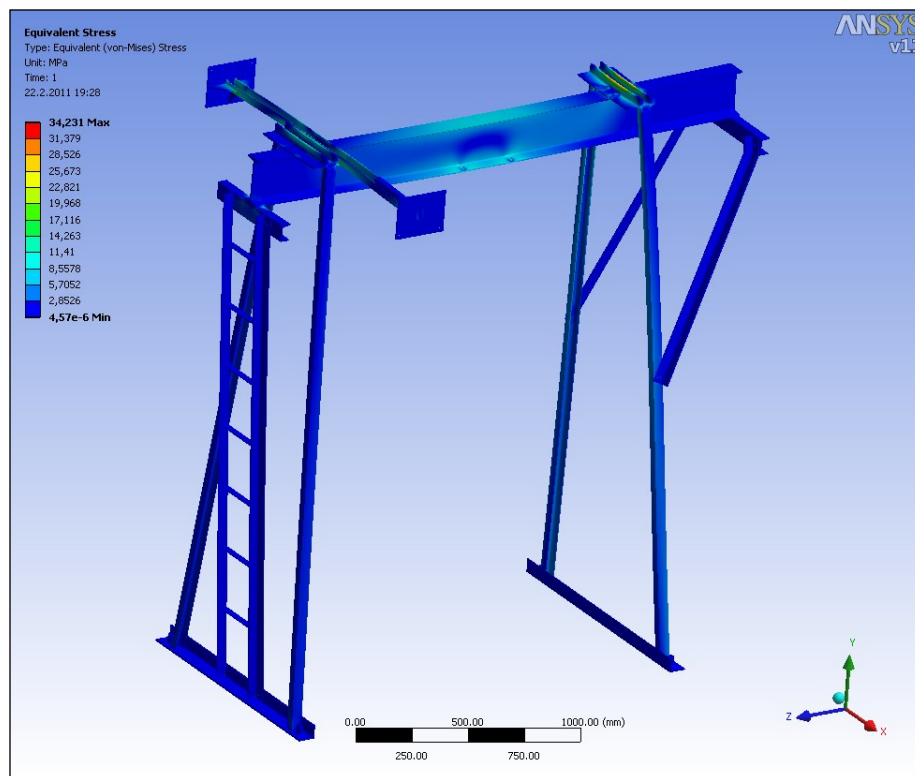


Zdroj: Autor

Obr. 5.8 Průhyb navržené ocelové konstrukce

Z obr. 5.8 vyplývá hodnota průhybu (zahrnující jak hmotnost břemene a jeřábové kočky, tak vlastní hmotnost konstrukce) $y_C = 0,296$ mm, což svědčí o již zmíněné vysoké tuhosti navržené ocelové konstrukce. Tím je splněn primární požadavek kladený na ocelovou konstrukci.

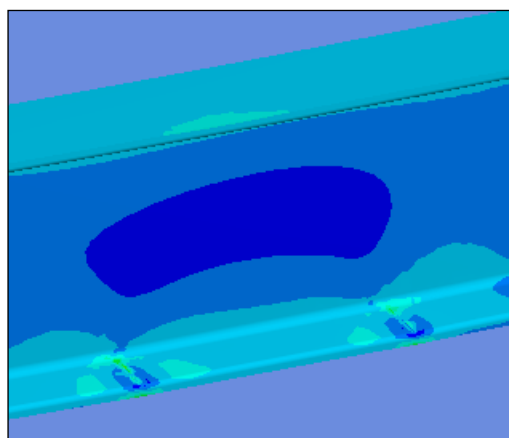
Maximální dosažené ekvivalentní napětí o hodnotě 34,23 MPa je rovněž vzhledem k hodnotě výpočtové pevnosti poměrně nízké.



Zdroj: Autor

Obr. 5.9 Průběh ekvivalentního napětí v navržené ocelové konstrukci

Na obr. 5.9 a obr. 5.10 je možno vidět průběh napětí v I profilu vlivem působení kolových tlaků jeřábové kočky. Pro úplnost by bylo vhodné podotknout, že osová vzdálenost pojezdových kol, tj. rozvor má hodnotu $e = 0,25$ m.



Zdroj: Autor

Obr. 5.10 Detail průběhu napětí pod pojezdovými koly jeřábové kočky

5.1.6 Posouzení hlavního nosníku na druhý mezní stav

Posouzení hlavního nosníku na druhý mezní stav sice není pro účely návrhu ocelové konstrukce měřicího pracoviště nezbytně nutné, nicméně dává dobrou zpětnou vazbu, co se tuhosti hlavního nosníku týče, tudíž je zde uvedeno.

Dle [9] má amplituda rozkmitaného jeřábového mostu (v tomto případě hlavního nosníku) vzniklá odložením břemene klesnout nejpozději za čas $t_{t1} = 15$ s na hodnotu $\max. a_{mp} = 0,5$ mm.

- Statický průhyb od jmenovitého břemene

$$y_{ST} = \frac{Q \cdot g \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_{xI220}} = \frac{500 \cdot 9,81 \cdot 1,665^3}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,06 \cdot 10^{-5}} \cong \underline{0,073} \text{ mm} \quad (5.4)$$

- Tuhost hlavního nosníku:

$$c_0 = \frac{Q \cdot g}{y_{ST}} = \frac{500 \cdot 9,81}{0,073} = \underline{6,683 \cdot 10^4} \text{ N/mm} \quad (5.5)$$

- Redukovaná hmotnost hlavního nosníku a kočky je dle [14] dána vztahem:

$$m_{red} = \frac{17}{35} \cdot m_n \cdot L + m_K = \frac{17}{35} \cdot 31,1 \cdot 1,665 + 163 = \underline{188,15} \text{ kg} \quad (5.6)$$

kde: m_n [kg/m] - délková hmotnost hlavního nosníku,

pro I 220 je $m_n = 31,1$ kg/m.

- Frekvence vlastního kmitání mostu:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{c_0}{m_{red}}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{6,683 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{188,15}} = \underline{94,85} \text{ s}^{-1} \quad (5.7)$$

- Čas t_{t1} [s], během kterého klesne amplituda $y_{ST} = 0,073$ mm na hodnotu $a_{mp} = 0,5$ mm.

$$t_{t1} = \frac{\ln(2 \cdot y_{ST})}{f \cdot \nu} = \frac{\ln(2 \cdot 0,073)}{94,85 \cdot 0,1} \cong \underline{0,202} \text{ s} \quad (5.8)$$

kde: ν – logaritmický dekrement útlumu kmitání, dle [9], VII. přílohy,

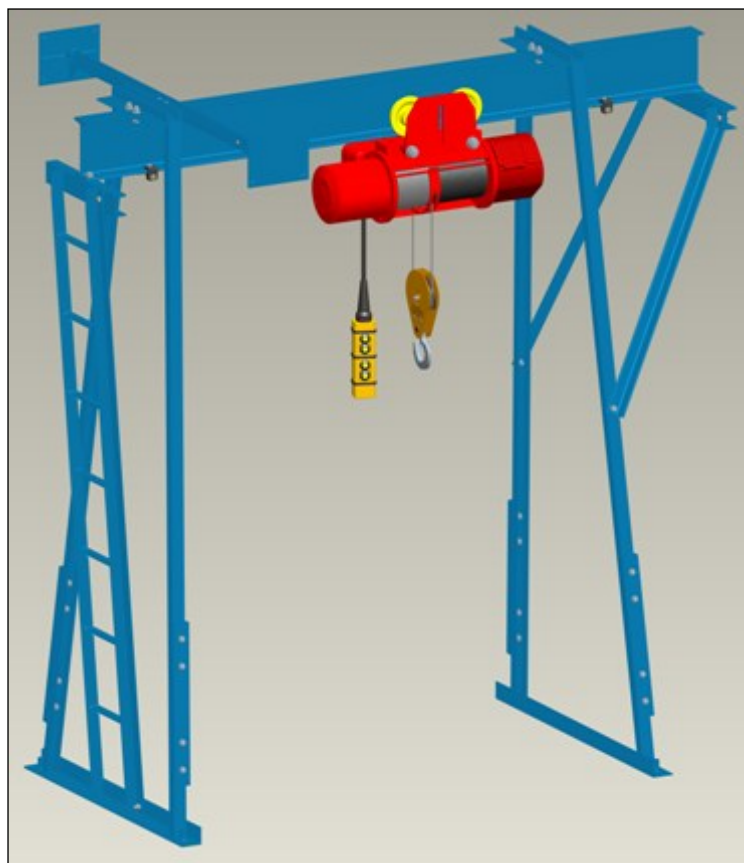
odpovídá poměru $\frac{h}{L} = \frac{220}{1665} = 0,132 \approx \frac{1}{8}$ logaritmický dekrement

útlumu $\nu = 0,1$ [-].

Je zřejmé, že tuhost ocelové konstrukce je opravdu vysoká, o čemž svědčí jak průhyb od jmenovitého břemene, tak i průhyb od břemene a jeřábové kočky, stejně jako minimální hodnota času útlumu. Nosník na druhý mezní stav vyhovuje.

5.1.7 Vizualizace navržené ocelové konstrukce měřicího pracoviště

Vizualizace navržené ocelové konstrukce je konečnou fází návrhu, kdy je možno v rámci sestavy ve 3D prostředí jednak naposledy zkontrolovat jednotlivé prvky a jejich spojení a zároveň tyto prvky např. barevně sladit.



Zdroj: Autor

Obr. 5.11 3D model navržené ocelové konstrukce měřicího pracoviště s jeřábovou kočkou

5.2 Statický výpočet nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště

Podrobný statický výpočet navržené nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště je, s ohledem na svou složitost a poměrnou rozsáhlost, zpracován jako samostatná publikace – příspěvek do odborného periodika, kde byl také publikován.

Tento příspěvek s názvem *Statický výpočet nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště* je taktéž k dispozici na příloženém CD.

5.3 Sestavení nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště

5.3.1 Montáž nosné ocelové konstrukce a jeřábové kočky

Na základě návrhu nosné ocelové konstrukce byly v prostorách laboratoře Ústavu dopravních a procesních zařízení, Institutu dopravy vyrobeny jednotlivé díly této konstrukce, které byly následně opatřeny ochranným nátěrem v barevném provedení dle 3D návrhu.

Závěrečným prvkem bylo sestavení nosné ocelové konstrukce a samozřejmě montáž podvěsného elektrického kladkostroje. S ohledem na ztížené pracovní podmínky, konkrétně nedostatek prostoru v okolí ocelové konstrukce, se jednalo o poměrně náročný úkol.

Největším problémem se totiž ukázala malá využitelná výška nad hlavním nosníkem ocelové konstrukce, která takřka znemožňovala přímé použití jednoduchých zdvihadel. Po maximálním možném přizvednutí tedy následovalo zvedání prostřednictvím ručního zvedáku umístěného pod jeřábovou kočkou.

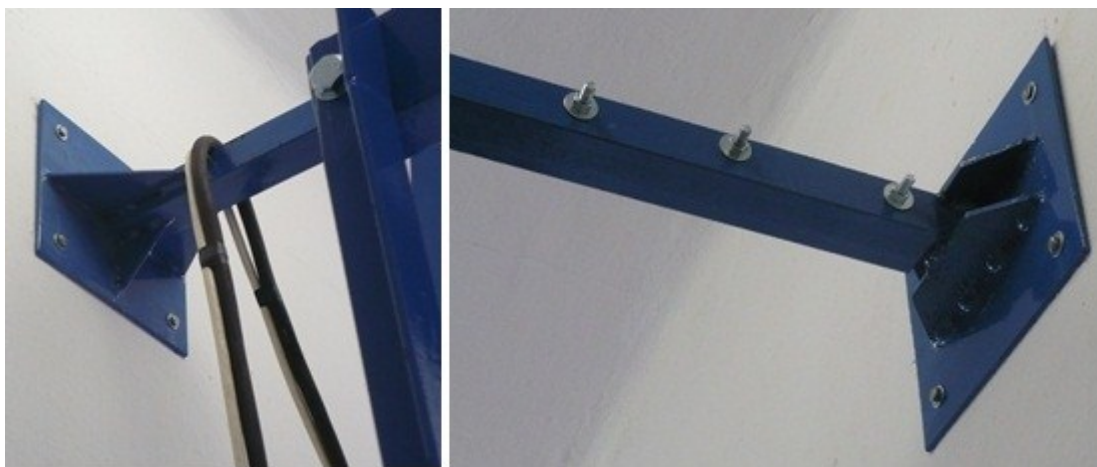


Zdroj: Autor

Obr. 5.12 Montáž jeřábové kočky na nosnou ocelovou konstrukci měřicího pracoviště

Za účelem dosažení co největší tuhosti ocelové konstrukce bylo provedeno příčné vyztužení, spočívající v příčně uloženém U profilu (příšroubovanému k hlavnímu nosníku), do kterého zapadly dvě příčné vzpěry (z levé a pravé strany), viz obr. 5.13. Po

přípevnění vzpěr ke zdi byly příčné vzpěry s U profilem sešroubovány. Použití rozebíratelného spojení bylo zvoleno s ohledem na nedostatečnou rovinnost a tedy i rovnoběžnost stěn laboratoře.



Zdroj: Autor

Obr. 5.13 Detail příčného vyztužení ocelové konstrukce na levé a pravé straně

Vzhledem k výšce ocelové konstrukce bylo předpokládáno, že moment síly (k základně) od zrychlujícího kladkostroje bude nabývat vysokých hodnot, což by mohlo znamenat nestabilitu ocelové konstrukce při rozjezdech a dojezdech kladkostroje. Proto bylo přistoupeno k ukotvení základny prostřednictvím mechanických kotev.



Zdroj: Autor

Obr. 5.14 Detail připojení základny ocelové konstrukce k podlaze laboratoře

Po ukotvení základny kotvami byla několikerými rozjezdy kočky s břemenem zkušebně ověřena tuhost celé konstrukce a byla shledána jako plně postačující.

5.3.2 Měřicí pracoviště

Po montáži jeřábové kočky proběhlo připojení jeřábové kočky nejprve přímo k napájecí síti a po ověření funkčnosti kočky následovalo připojení k měniči kmitočtu.

Níže na obr. 5.15 jsou uvedeny fotografie sestavené nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště s podvěsnou jeřábovou kočkou.



Zdroj: Autor

Obr. 5.15 Měřicí pracoviště

Stavbu nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště a měřicí pracoviště samotné je možné shlédnout také na fotografiích umístěných na přiloženém CD ve složce *Fotogalerie → Měřicí pracoviště*.

5.4 Zajištění měření

Součástí stavby měřicího pracoviště bylo zajištění měřicí aparatury, která by umožnila potvrdit či vyvrátit správnost nově přijatého matematického popisu pohybu jeřábové kočky s břemenem.

Vzhledem k předpokládanému pohybu kočky a břemene je nejvhodnější a také (z hlediska proveditelnosti) nejpraktičtější měření zrychlení jeřábové kočky, jeřábového háku (resp. kladnice) a samozřejmě břemene.

Výhodou je totiž skutečnost, že aproximované řešení jakož i řešení numerické umožňuje s dostatečně malým časovým krokem vykreslit průběhy zrychlení, které pak budou srovnány s průběhy naměřenými.

5.4.1 Senzory zrychlení

Akcelerometry, neboli senzory zrychlení, jsou senzory využívající setrvačnosti hmoty pro měření rozdílu mezi zrychlením kinematickým (vztaženým k určitému inerciálnímu prostoru) a zrychlením gravitačním. V současné době jsou trendem v oblasti vývoje akcelerometry využívající technologii MEMS.

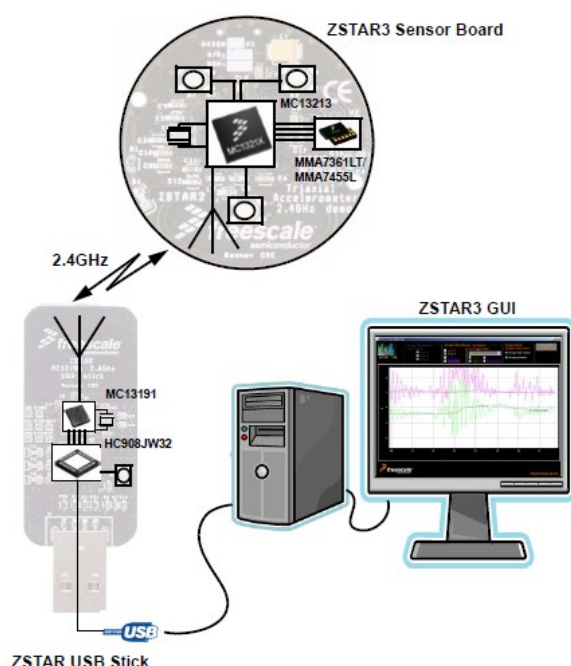
Technologie MEMS představuje sofistikované spojení integrovaných obvodů, mechanických elementů (pružin), senzorů, akčních členů a řídicí a vyhodnocovací techniky (tj. mikro-elektro-mechanických prvků) na jeden křemíkový substrát prostřednictvím moderních výrobních technologií, [13].

Funkce a struktura MEMS akcelerometrů je založena na změně kapacity tříelektrodového kondenzátoru vlivem působící síly vzniklé zrychlením pouzdra senzoru. Mezi dvě elektrody je vetknut nosník, čímž se vytvoří dva kondenzátory. Jakmile se nosník pohybuje vlivem setrvačných sil vznikajících při zrychlení, kondenzátory mění svou kapacitu.

Mezi výhody MEMS akcelerometrů zcela jistě patří malé rozměry, nízká spotřeba elektrické energie, vysoká mechanická odolnost a v neposlední řadě také nízká pořizovací cena.

5.4.2 Volba měřicí aparatury

Pro účely měření zrychlení kývajícího se břemene byl zvolen měřicí kit Freescale ZSTAR3 amerického výrobce Freescale Semiconductor. Kit obsahuje vysílací modul (tj. akcelerometr s CPU a vysílačem) a USB modul s přijímačem ZigBee 2,4 GHz, jak ukazuje obr. 5.16. K jednomu přijímači lze bezdrátově připojit až 16 akcelerometrů. Právě možnost bezdrátového připojení je s ohledem na problematiku kývání břemene velice užitečná, neboť při kabelovém spojení by mohlo dojít k ovlivnění kmitání břemene a to vzhledem k tíze dlouhého datového kabelu a to obzvláště v případě, že zavěšené břemeno je nižší hmotnosti.

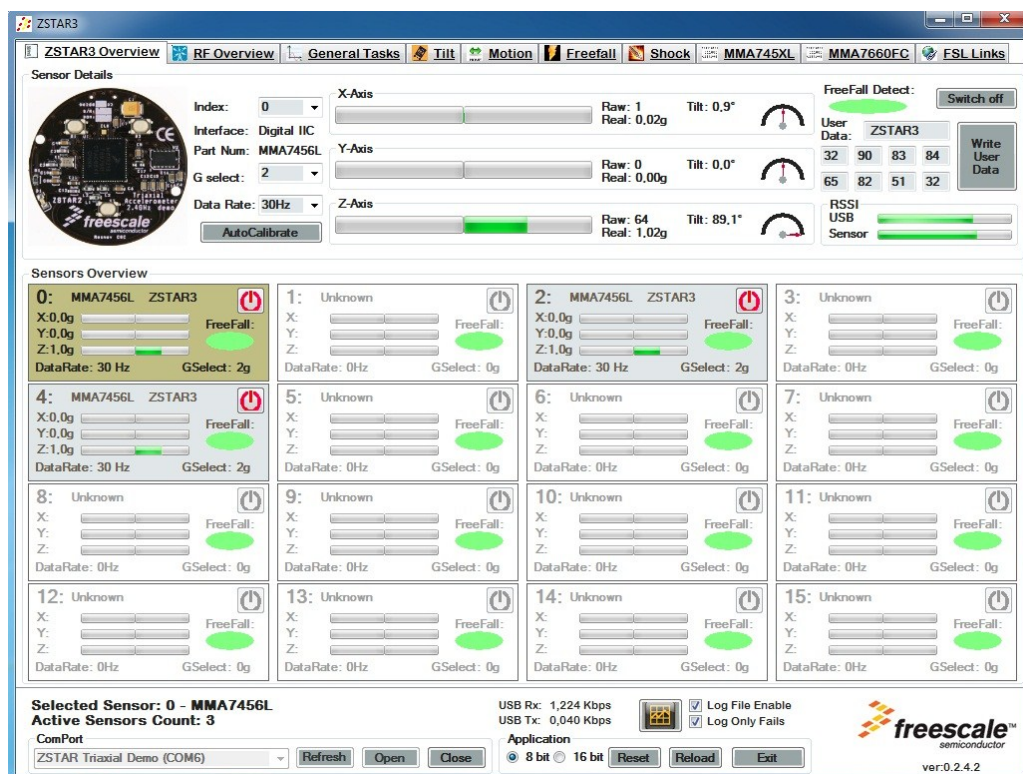


Zdroj: [23]

Obr. 5.16 Blokové schéma měřicího kitu Freescale ZSTAR3

Nespornou výhodou je vedle malých vnějších rozměrů možnost tříosého snímání zrychlení při konfigurovatelné rychlosti přenosu ze senzorů (30, 60 nebo 120 Hz). Bezdrátový dosah činí zhruba 20 m. Akcelerometr, resp. vysílací modul je napájen prostřednictvím lithiové CR2032 3V baterie o velikosti mince. Tento fakt svědčí o nízké spotřebě elektrické energie, která v normálním režimu činí $1,8 \div 3,9$ mA, v klidovém režimu dokonce méně než 1 mA. Senzor je dále vybaven auto kalibrační funkcí, která je provedena položením senzoru na plochu (např. stůl či podlaha) a následnou kalibrací na hodnotu gravitačního zrychlení g [$m \cdot s^{-2}$].

K USB přijímači je možno připojit jak analogové, tak digitální senzory, přičemž pro účely měření kývání břemene bude použit USB modul a sensorové desky s digitálním akcelerometrem MMA7456L.



Zdroj: Autor

Obr. 5.17 Softwarové prostředí ZSTAR3 GUI

Data ze snímače zrychlení jsou bezdrátově odesílána do USB přijímače, odkud jsou zpracována prostřednictvím softwaru ZSTAR3 GUI [4].

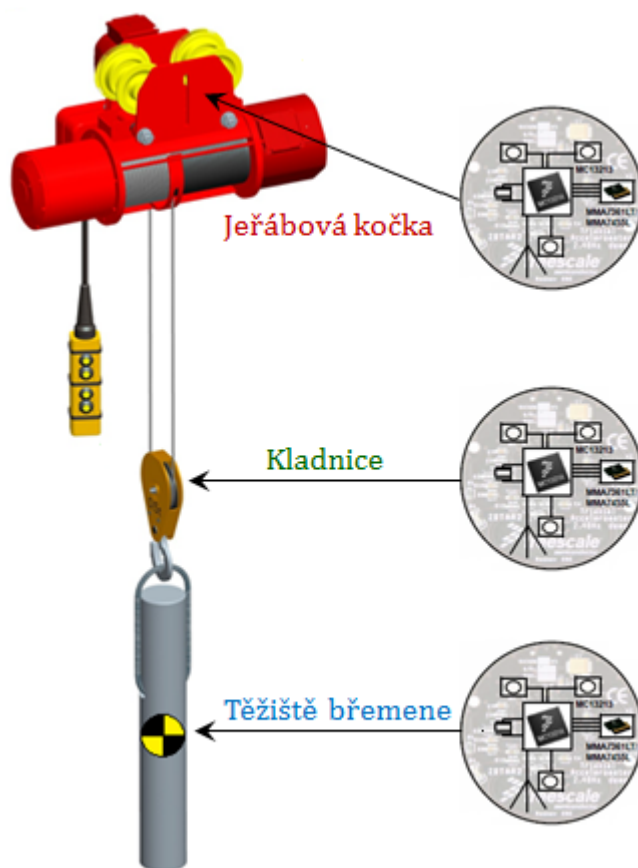
5.4.3 Umístění akcelerometrů

Vzhledem k tomu, že matematický popis pohybu jeřábové kočky s břemenem uvažuje tři DOF, musí být pro správnou verifikaci použity tři akcelerometry.

První akcelerometr s pořadovým číslem 4 je umístěn na jeřábové kočce, konkrétně na krytu lanového bubnu.

Druhý akcelerometr s pořadovým číslem 0 je umístěn na kladnici, zhruba 50 mm pod osou kladnice.

Třetí akcelerometr s pořadovým číslem 2 je umístěn v místě s nejnižší možnou vzdáleností k těžišti břemene, tj. uprostřed délky břemene.



Zdroj: Autor

Obr. 5.18 Schéma umístění senzorů zrychlení pro účely vlastního měření (bez měřítka)

Specifické číslování akcelerometrů je zvoleno s ohledem na použitou vzorkovací frekvenci 60 Hz. Tato hodnota vzorkovací frekvence vyžaduje v prostředí softwaru ZSTAR3 GUI rozdíl mezi každým dalším pořadovým číslem akcelerometru větší nebo roven dvěma. Zmíněné číslování je dodrženo u všech provedených měření.

Ve všech provedených měřeních jsou akcelerometry ustaveny stejným směrem, co se polohy týče a je tedy vždy měřeno zrychlení v ose z . Akcelerometry jsou při měření ve svislé poloze, kdy pomyslná osa z prochází středem akcelerometru a je rovnoběžná s osou dráhy jeřábové kočky.

Akcelerometry jsou uloženy v plastových pouzdrech, která byla pro tyto účely vysoustružena z plastu. Tato pouzdra jsou pak připevněna k sledovaným částem pomocí nalepovacích suchých zipů, které umožňují jednak spolehlivé upevnění odolné vůči dynamickým vlivům působícím při rozjezdu kočky, jednak snadnou a rychlou montáž a demontáž pouzder se senzory. Pouzdra jsou z obou stran otevřená za účelem snadné výměny baterie. Fotografie těchto pouzder včetně akcelerometrů již připevněných na konkrétní břemena jsou umístěny na příloženém CD ve složce *Fotogalerie* → *Fotografie z měření*.

6 VLASTNÍ MĚŘENÍ A VERIFIKACE ZVOLENÉ TEORIE

Provedení měření a následná verifikace zvoleného matematického popisu se třemi stupni volnosti je posledním z cílů této disertační práce.

Jak již bylo zmíněno v předchozí kapitole, z hlediska proveditelnosti se jako nejpraktičtější řešení jeví právě měření zrychlení.

Zvažováno bylo rovněž měření polohy zmíněných součástí, tj. jeřábové kočky, konce lana a těžiště břemene. Nicméně, vzhledem k tomu, že jeřábová kočka koná translační pohyb, zatímco kladnice s břemenem koná pohyb kmitavý, bylo by velmi obtížné takové měření provést, zejména tedy v případě kladnice a břemene.

Z těchto důvodů tedy bylo zvoleno provedení měření zrychlení zmíněných součástí.

Výsledky měření, tj. získané časové průběhy zrychlení měřených veličin, tj. $\ddot{x}(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$ a $\ddot{\psi}(t)$ by měly tedy potvrdit správnost nového matematického popisu, zejména co se třetího stupně volnosti týče.

Veškeré soubory s naměřenými daty jsou uloženy na přiloženém CD ve složce *Měření*, včetně klíče poskytujícího bližší informace k jednotlivým měřením.

6.1 Provedení měření zrychlení pro břemeno č. 1

6.1.1 Základní informace o realizovaném měření

Jako první bylo provedeno měření zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene č. 1, které bylo detailně představeno v kap. 4.8.1. a teoretické výsledky v kap. 4.8.2, na které tato kapitola navazuje. Délka odvinutého lana byla zvolena maximální možná s ohledem na výšku měřicího pracoviště, tj. $l = 1,725$ m.

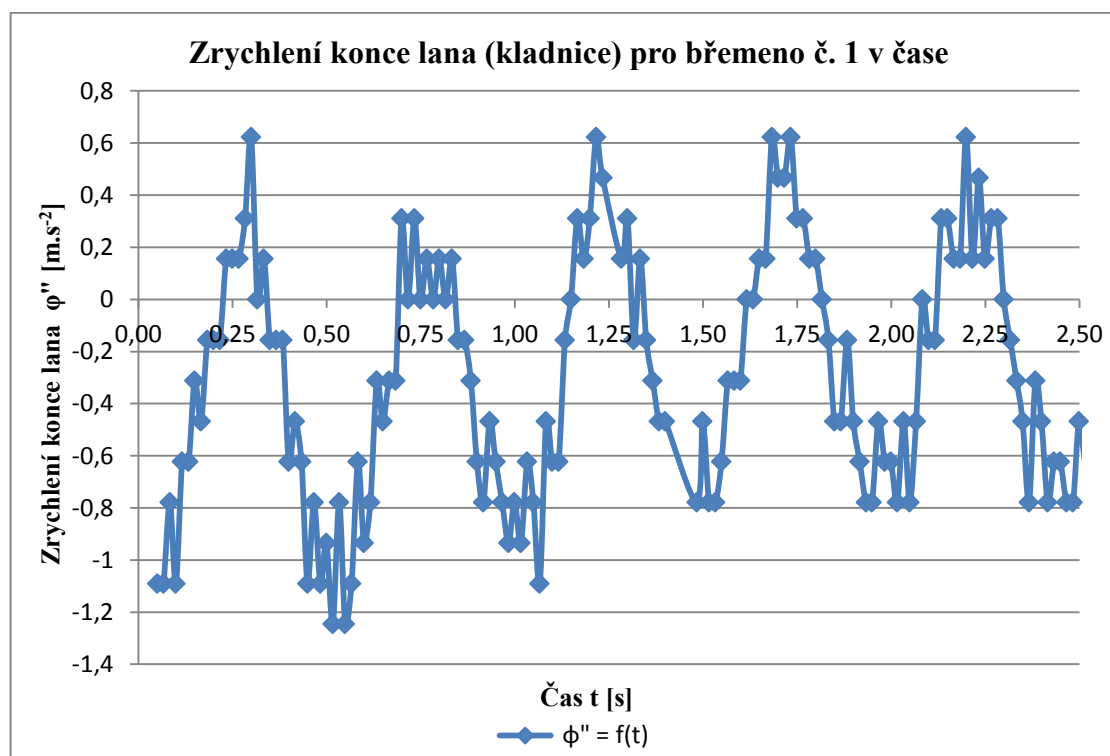
Prostřednictvím akcelerometrů a ZSTAR3 GUI softwaru (viz obr. 5.17), konkrétně pomocí funkce *Acquire data*, byly získány datové soubory obsahující naměřená data.

ZSTAR3 GUI software umožňuje přímý export naměřených dat do prostředí MS Excel včetně základních informací o provedeném měření (viz obr. 6.2).

Vzhledem k tomu, že akcelerometry jsou kalibrovány na hodnotu gravitačního zrychlení g [m.s^{-2}], jsou naměřené hodnoty vztaženy vůči gravitačnímu zrychlení. Bylo tedy nutné naměřené hodnoty vynásobit hodnotou 9,81.

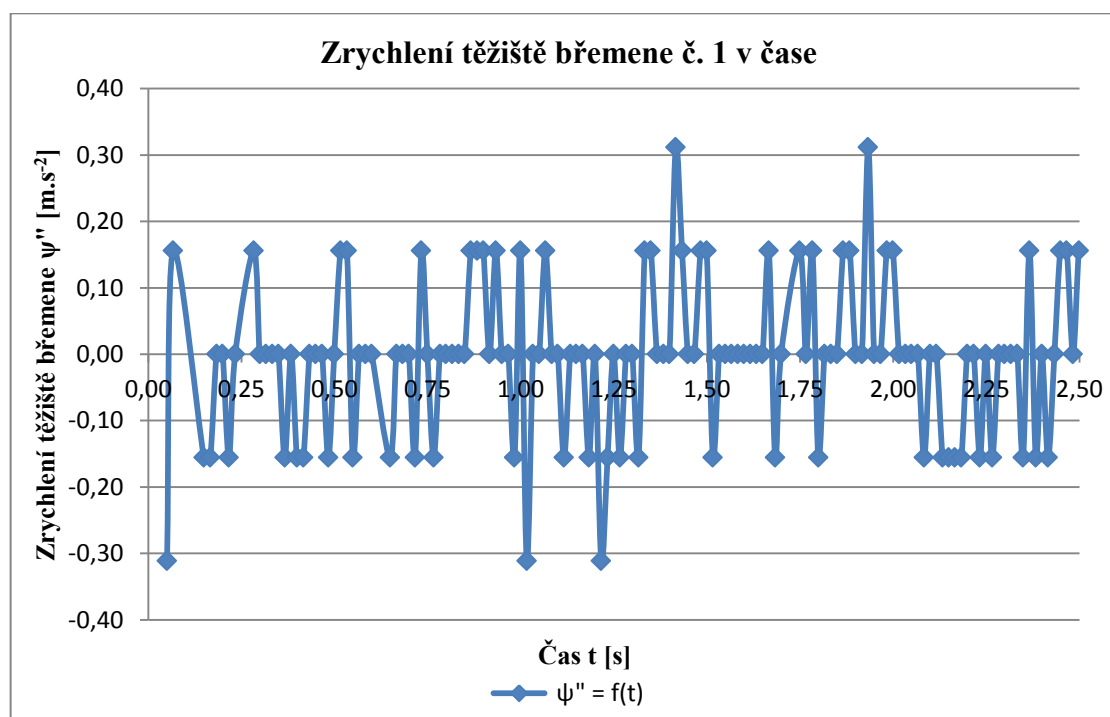
6.1.2 Naměřená data pro břemeno č. 1

Na základě naměřených dat byly v MS Excel 2010 sestrojeny časové závislosti uvedené na obr. 6.3 až obr. 6.5.



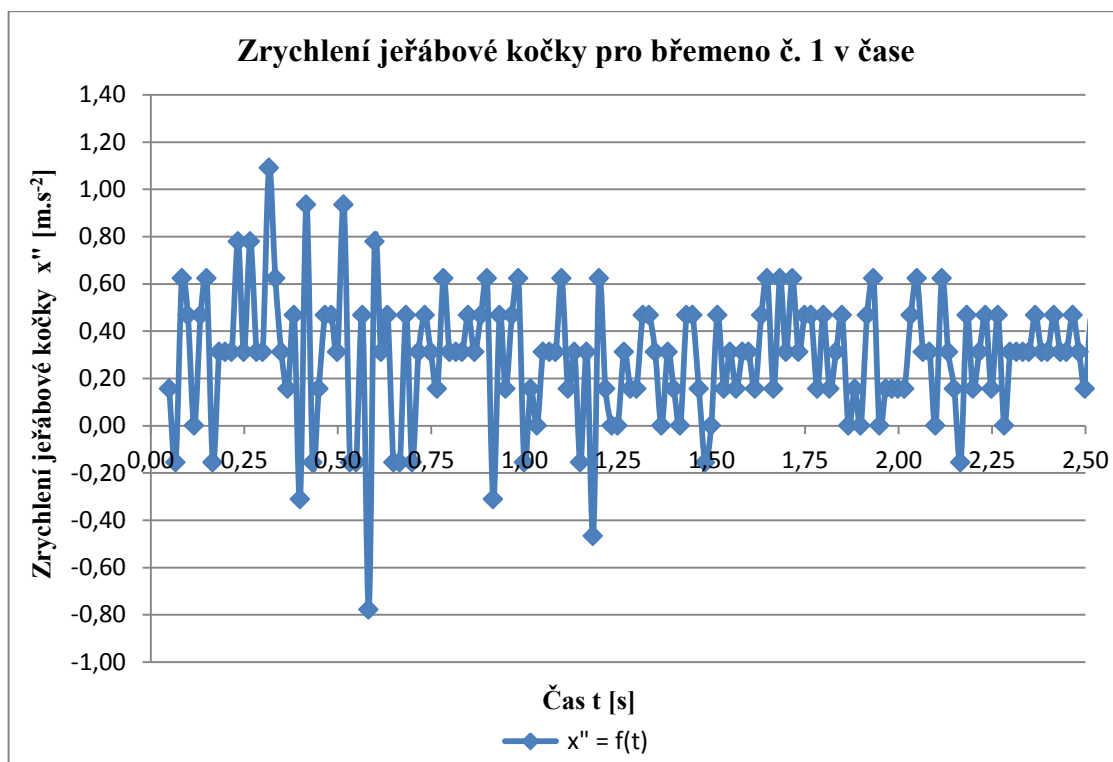
Obr. 6.3 Zrychlení konce lana v čase

Zdroj: Autor



Obr. 6.4 Zrychlení těžiště břemene č. 1 v čase

Zdroj: Autor



Zdroj: Autor

Obr. 6.5 Zrychlení jeřábové kočky pro břemeno č. 1 v čase

Je zřejmé, že zvolený časový interval je v případě naměřených, resp. zpracovaných dat o sekundu kratší než v případě dat teoretických. Kratší interval je zvolen s ohledem na délku dráhy měřicího pracoviště, kterou jeřábová kočka urazí za dobu odpovídající třem sekundám.

Jak je uvedeno na obr. 6.3, průběhy z naměřených dat jsou stejně jako průběhy teoretické průběhy periodickými. Průběh zrychlení kladnice je mírně nesymetrický vůči časové ose, nicméně, uvažíme-li tuto skutečnost, vychází maximální dosažené hodnoty zrychlení téměř stejně jako v případě výsledků teoretických. I zde jsou patrné „nezávislé kmity“ v jednotlivých amplitudách zrychlení, nejvýraznější je tento jev u druhé amplitudy odpovídající času $t = 0,75$ s.

Zrychlení těžiště břemene č. 2 dosahuje pro většinu naměřených dat opět téměř totožných hodnot jako v případě dat teoretických, avšak v určitých časových úsecích jsou tyto hodnoty překonány hodnotami špičkovými.

Největší zrychlení jeřábové kočky taktéž dosahuje velmi podobných hodnot jako v případě dat teoretických, avšak průběh již není tak periodický - tuto skutečnost nepochybně ovlivňuje řada rušivých faktorů, např. vůle v ozubeném převodu jeřábové kočky, kde je použito přímé, nekorigované soukolí se značnou vůlí. Dalším rušivým faktorem může být tření nákolků o okraj spodní pásnice profilu pojezdové dráhy.

6.1.3 Explorační analýza naměřených dat pro břemeno č. 1

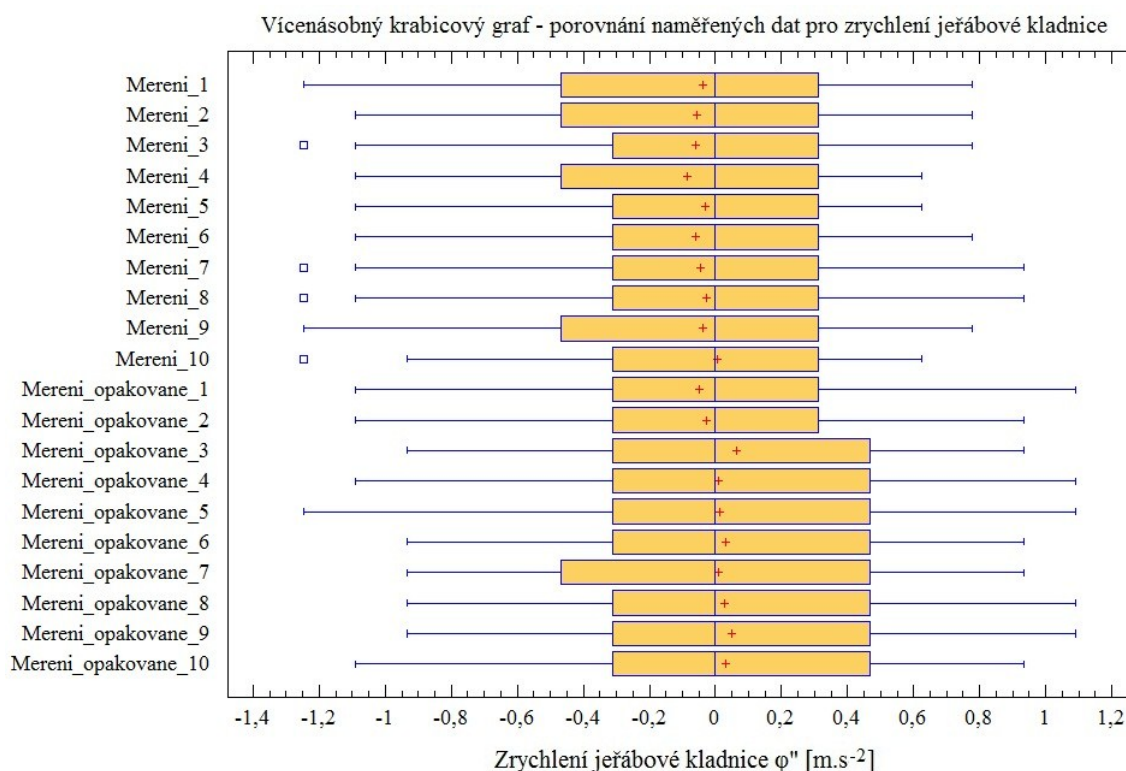
Je vhodné porovnat naměřené datové soubory a ověřit rozdíl mezi jednotlivými datovými soubory.

Naměřená data byla z prostředí MS Excel 2010 zkopírována do prostředí statistického softwaru STATGRAPHICS Plus 5.0 [5], kde byla provedena explorační (exploratorní) analýza zmíněných dat.

Naměřená data představují kvantitativní neboli numerickou proměnnou, které odpovídají příslušné charakteristiky, zejména tedy míry polohy a míry variability. Této proměnné také odpovídá příslušné grafické zobrazení, jak uvádí [15].

Analýza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kladnice

Pro účely explorační analýzy dat byl tedy zvolen vícenásobný krabicový graf, ze kterého jsou na první pohled zřejmé statistiky jako je minimum a maximum, horní a dolní kvartil, interkvartilové rozpětí, medián, střední hodnota a v neposlední řadě také odlehlá pozorování.



Obr. 6.6 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Jak vyplývá z krabicového grafu, srovnávané soubory dat (výběrové soubory), které jsou dle [16] závislými datovými soubory, představují poměrně homogenní datové soubory s velmi blízkými středními hodnotami a téměř identickými hodnotami interkvartilového rozpětí (viz obr. 6.7).

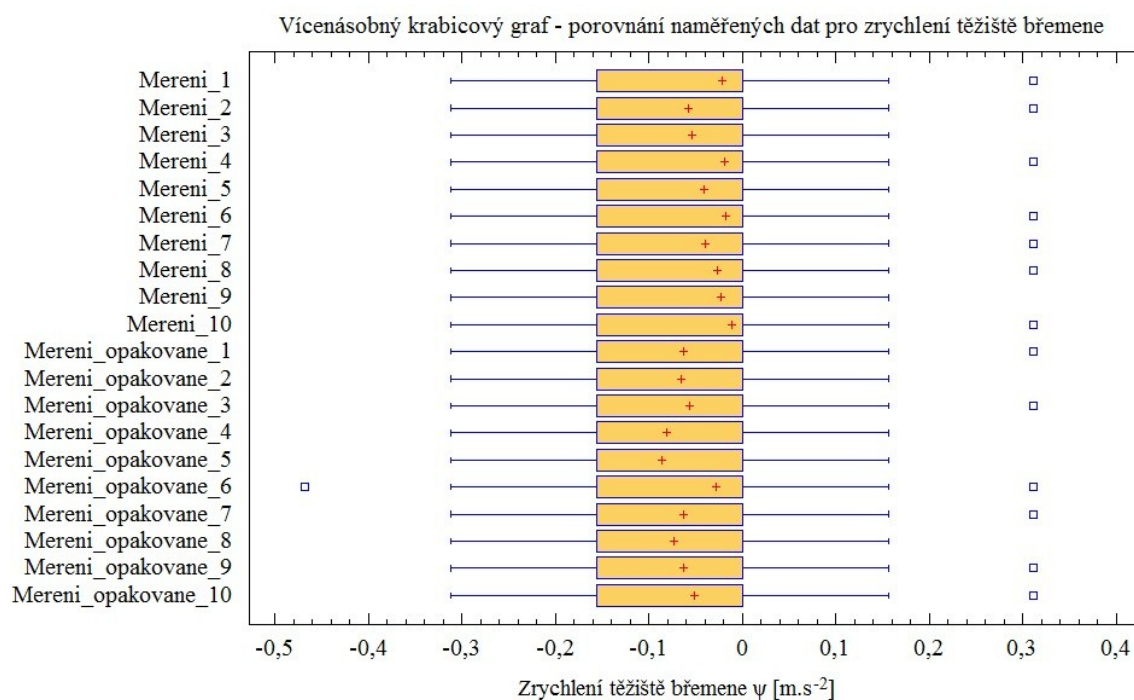
Summary Statistics						
	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	139	-0,0380884	0,0	0,215707	0,464443	-1,24571
Mereni_2	139	-0,0571328	0,0	0,205974	0,453843	-1,09
Mereni_3	139	-0,0582528	0,0	0,170527	0,41295	-1,24571
Mereni_4	139	-0,0851387	0,0	0,18808	0,433882	-1,09
Mereni_5	139	-0,0324872	0,0	0,180438	0,424779	-1,09
Mereni_6	139	-0,0593731	0,0	0,181113	0,425573	-1,09
Mereni_7	139	-0,0448099	0,0	0,1786	0,422611	-1,24571
Mereni_8	139	-0,0268859	0,0	0,209061	0,457231	-1,24571
Mereni_9	139	-0,0369681	0,0	0,208588	0,456714	-1,24571
Mereni_10	139	0,00560123	0,0	0,149843	0,387095	-1,24571
Mereni_opakovane_1	139	-0,0492909	0,0	0,208639	0,454575	-1,09
Mereni_opakovane_2	139	-0,0268859	0,0	0,214332	0,46296	-1,09
Mereni_opakovane_3	139	0,0638541	0,0	0,203749	0,451386	-0,934286
Mereni_opakovane_4	139	0,00896197	0,0	0,234306	0,484052	-1,09
Mereni_opakovane_5	139	0,0123227	0,0	0,25198	0,501976	-1,24571
Mereni_opakovane_6	139	0,0313669	0,0	0,216529	0,465326	-0,934286
Mereni_opakovane_7	139	0,00784173	0,0	0,246449	0,496436	-0,934286
Mereni_opakovane_8	139	0,0268859	0,0	0,252283	0,502278	-0,934286
Mereni_opakovane_9	139	0,0504111	0,0	0,226029	0,475425	-0,934286
Mereni_opakovane_10	139	0,0313669	0,0	0,23199	0,481654	-1,09
Total	2780	-0,013835	0,0	0,208835	0,456984	-1,24571
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,778571	2,02429	-0,467143	0,311429	0,778571	
Mereni_2	0,778571	1,88857	-0,467143	0,311429	0,778571	
Mereni_3	0,778571	2,02429	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_4	0,622857	1,71286	-0,467143	0,311429	0,778571	
Mereni_5	0,622857	1,71286	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_6	0,778571	1,88857	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_7	0,934286	2,18	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_8	0,934286	2,18	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_9	0,778571	2,02429	-0,467143	0,311429	0,778571	
Mereni_10	0,622857	1,88857	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_opakovane_1	1,09	2,18	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_opakovane_2	0,934286	2,02429	-0,311429	0,311429	0,622857	
Mereni_opakovane_3	0,934286	1,88857	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_4	1,09	2,18	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_5	1,09	2,33571	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_6	0,934286	1,88857	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_7	0,934286	1,88857	-0,467143	0,467143	0,934286	
Mereni_opakovane_8	1,09	2,02429	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_9	1,09	2,02429	-0,311429	0,467143	0,778571	
Mereni_opakovane_10	0,934286	2,02429	-0,311429	0,467143	0,778571	
Total	1,09	2,33571	-0,311429	0,311429	0,622857	

Zdroj: Autor

Obr. 6.7 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení kladnice pro břemeno č. 1)

Jak vyplývá z obr. 6.7, minimální a maximální hodnoty jsou velmi blízké datům teoretickým, pro srovnání viz tab. 4.2.

Analýza naměřených dat pro zrychlení těžiště břemene č. 1



Obr. 6.8 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Naměřená data zrychlení těžiště břemene mají totožná interkvartilová rozpětí, totožné minimální a maximální hodnoty (neuvažující odlehlá pozorování), téměř identické rozptyly (viz obr. 6.9), avšak střední hodnoty jako míry polohy již netvoří „ucelenou řadu“ jako v předchozím případě.

Summary Statistics

	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	135	-0,0219153	0,0	0,0188775	0,137395	-0,311429
Mereni_2	135	-0,057672	0,0	0,0154676	0,124369	-0,311429
Mereni_3	135	-0,0542116	0,0	0,0149529	0,122282	-0,311429
Mereni_4	135	-0,018455	0,0	0,0159421	0,126262	-0,311429
Mereni_5	135	-0,0415238	0,0	0,0131006	0,114458	-0,311429
Mereni_6	135	-0,0173016	0,0	0,0132695	0,115193	-0,311429
Mereni_7	135	-0,0392169	0,0	0,0165453	0,128628	-0,311429
Mereni_8	135	-0,0265291	0,0	0,0153953	0,124078	-0,311429
Mereni_9	135	-0,0230688	0,0	0,0143015	0,119589	-0,311429
Mereni_10	135	-0,0115344	0,0	0,0172369	0,131289	-0,311429
Mereni_opakovane_1	135	-0,0622857	0,0	0,0145482	0,120616	-0,311429
Mereni_opakovane_2	135	-0,065746	0,0	0,0146447	0,121015	-0,311429
Mereni_opakovane_3	135	-0,0565185	0,0	0,0139718	0,118202	-0,311429
Mereni_opakovane_4	135	-0,0807407	-0,155714	0,0129746	0,113906	-0,311429
Mereni_opakovane_5	135	-0,0865079	-0,155714	0,0165265	0,128556	-0,311429
Mereni_opakovane_6	135	-0,0276825	0,0	0,0133418	0,115507	-0,467143
Mereni_opakovane_7	135	-0,0622857	0,0	0,0141863	0,119108	-0,311429
Mereni_opakovane_8	135	-0,0738201	0,0	0,0158617	0,125943	-0,311429
Mereni_opakovane_9	135	-0,0622857	0,0	0,015272	0,12358	-0,311429
Mereni_opakovane_10	135	-0,0519048	0,0	0,0144758	0,120315	-0,311429
Total	2700	-0,0470603	0,0	0,0154284	0,124211	-0,467143
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,467143	0,778571	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_2	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_3	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_4	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_5	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_6	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_7	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_8	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_9	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_10	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_1	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_2	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_3	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_4	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_5	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_6	0,311429	0,778571	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_7	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_8	0,155714	0,467143	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_9	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Mereni_opakovane_10	0,311429	0,622857	-0,155714	0,0	0,155714	
Total	0,467143	0,934286	-0,155714	0,0	0,155714	

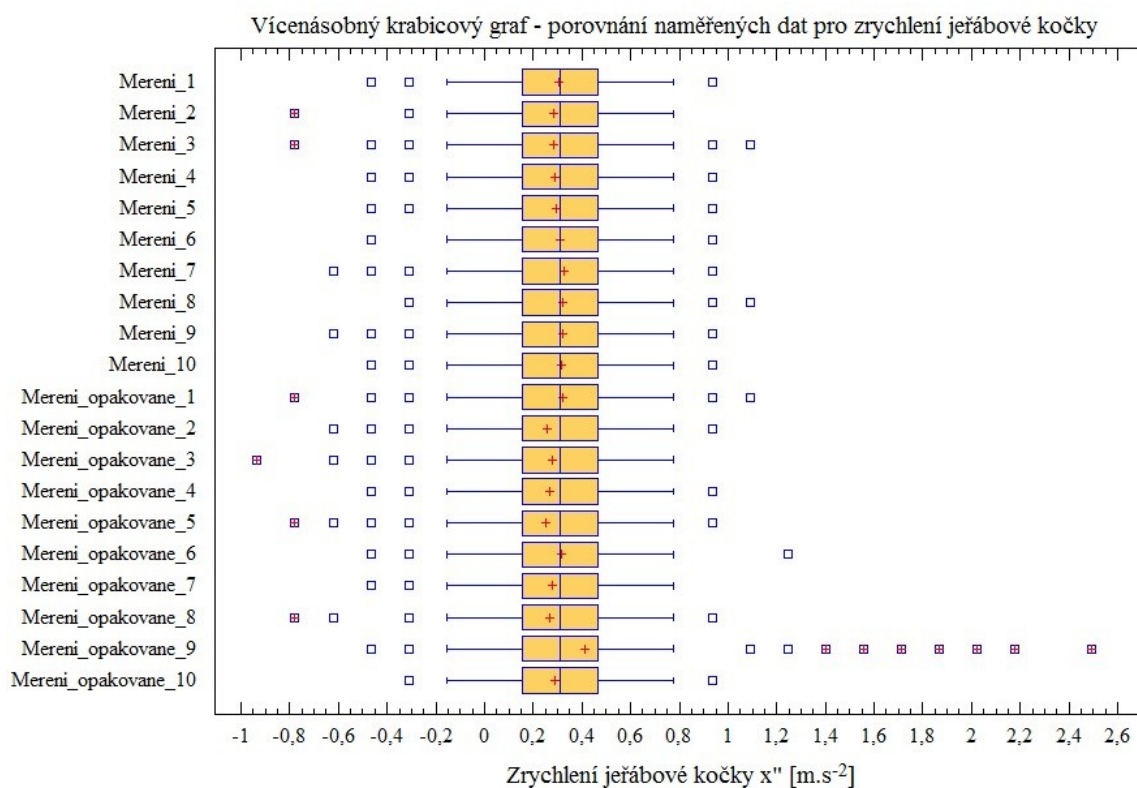
Zdroj: Autor

Obr. 6.9 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení těžiště břemene č. 1)

Vzhledem k tomu, že průběh zrychlení těžiště břemene je průběhem periodickým s očekávanou nulovou střední hodnotou, je důležitějším kritériem porovnání maximální a minimální hodnoty zrychlení. Jak vyplývá z obr. 6.8, v kladné části je hodnota max. zrychlení odpovídající teoretické hodnotě maxima, záporná hodnota zrychlení je mírně vyšší, což je zřejmě dáno špičkovými hodnotami, neboť graf průběhu zrychlení těžiště břemene (obr. 6.4) vykazuje totožné hodnoty jak v kladné, tak záporné části.

Analyza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kočky

Posledními analyzovanými datovými soubory jsou naměřená data zrychlení jeřábové kočky.



Obr. 6.10 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Z obr. 6.10 je zřejmé, že maximální hodnota zrychlení dle teoretických výsledků je v tomto případě v mnoha měřeních téměř totožná, avšak je již posuzována jako odlehlé pozorování. Maximální hodnota zrychlení je tedy dle vícenásobného krabicového grafu o něco nižší než hodnota teoretická. Zajímavé bezesporu je stejné maximum a minimum pro všechna měření (neuvažující odlehlá pozorování), stejně jako velikost interkvartilového rozpětí, velmi podobné rozptyly, viz obr. 6.11.

Zajímavá je rovněž přítomnost velkého počtu odlehlých pozorování v případě opakovaného měření č. 9, kde tyto hodnoty dosahují více než dvojnásobné hodnoty max. zrychlení. S největší pravděpodobností se jedná o přítomnost rušivých vlivů zmíněných v kap. 6.1.2.

Summary Statistics

	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	149	0,303088	0,311429	0,0782407	0,279715	-0,467143
Mereni_2	149	0,288347	0,311429	0,0688309	0,262356	-0,778571
Mereni_3	149	0,285302	0,311429	0,0748387	0,273567	-0,778571
Mereni_4	149	0,291572	0,311429	0,0721801	0,268663	-0,467143
Mereni_5	149	0,296798	0,311429	0,0662997	0,257487	-0,467143
Mereni_6	149	0,311429	0,311429	0,0652046	0,255352	-0,467143
Mereni_7	149	0,329195	0,311429	0,0716039	0,267589	-0,622857
Mereni_8	149	0,322924	0,311429	0,0822738	0,286834	-0,311429
Mereni_9	149	0,320834	0,311429	0,0793688	0,281725	-0,622857
Mereni_10	149	0,317699	0,311429	0,0727012	0,269632	-0,467143
Mereni_opakovane_1	149	0,322924	0,311429	0,0744099	0,272782	-0,778571
Mereni_opakovane_2	149	0,25813	0,311429	0,0900321	0,300053	-0,622857
Mereni_opakovane_3	149	0,277987	0,311429	0,0896533	0,297747	-0,934286
Mereni_opakovane_4	149	0,268581	0,311429	0,0651584	0,255261	-0,467143
Mereni_opakovane_5	149	0,250815	0,311429	0,0821484	0,286615	-0,778571
Mereni_opakovane_6	149	0,316654	0,311429	0,0774644	0,278324	-0,467143
Mereni_opakovane_7	149	0,276942	0,311429	0,0618774	0,248752	-0,467143
Mereni_opakovane_8	149	0,265446	0,311429	0,0679908	0,260751	-0,778571
Mereni_opakovane_9	149	0,4128	0,311429	0,282092	0,531124	-0,467143
Mereni_opakovane_10	149	0,290527	0,311429	0,0654201	0,255774	-0,311429
Total	2980	0,300299	0,311429	0,0849886	0,291528	-0,934286
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_2	0,778571	1,55714	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_3	1,09	1,86857	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_4	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_5	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_6	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_7	0,934286	1,55714	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_8	1,09	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_9	0,934286	1,55714	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_10	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_1	1,09	1,86857	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_2	0,934286	1,55714	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_3	0,778571	1,71286	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_4	0,934286	1,40143	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_5	0,934286	1,71286	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_6	1,24571	1,71286	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_7	0,778571	1,24571	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_8	0,934286	1,71286	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_9	2,49143	2,95857	0,155714	0,467143	0,311429	
Mereni_opakovane_10	0,934286	1,24571	0,155714	0,467143	0,311429	
Total	2,49143	3,42571	0,155714	0,467143	0,311429	

Zdroj: Autor

Obr. 6.11 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení jeřábové kočky)

Jak vyplývá z výpisu na obr. 6.11, naměřené hodnoty maximálního zrychlení jsou v měřeních, která nejsou zatížena odlehlým pozorováním, velmi blízké hodnotám vycházejícím z matematického popisu.

6.2 Provedení měření zrychlení pro břemeno č. 2

6.2.1 Základní informace o realizovaném měření

Jako druhé bylo provedeno měření zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene č. 2, které bylo detailně představeno v kap. 4.8.3 a teoretické výsledky v kap. 4.8.4 a na které tato kapitola rovněž navazuje. Délka odvinutého lana byla zvolena maximální možná s ohledem na výšku měřicího pracoviště a s ohledem na další měření, při kterém má být porovnán vliv délky závěsu břemene. Délka odvinutého lana pro toto měření tedy činí tj. $l = 1,155$ m a vzdálenost $r_{S1} = 0,3465$ m.



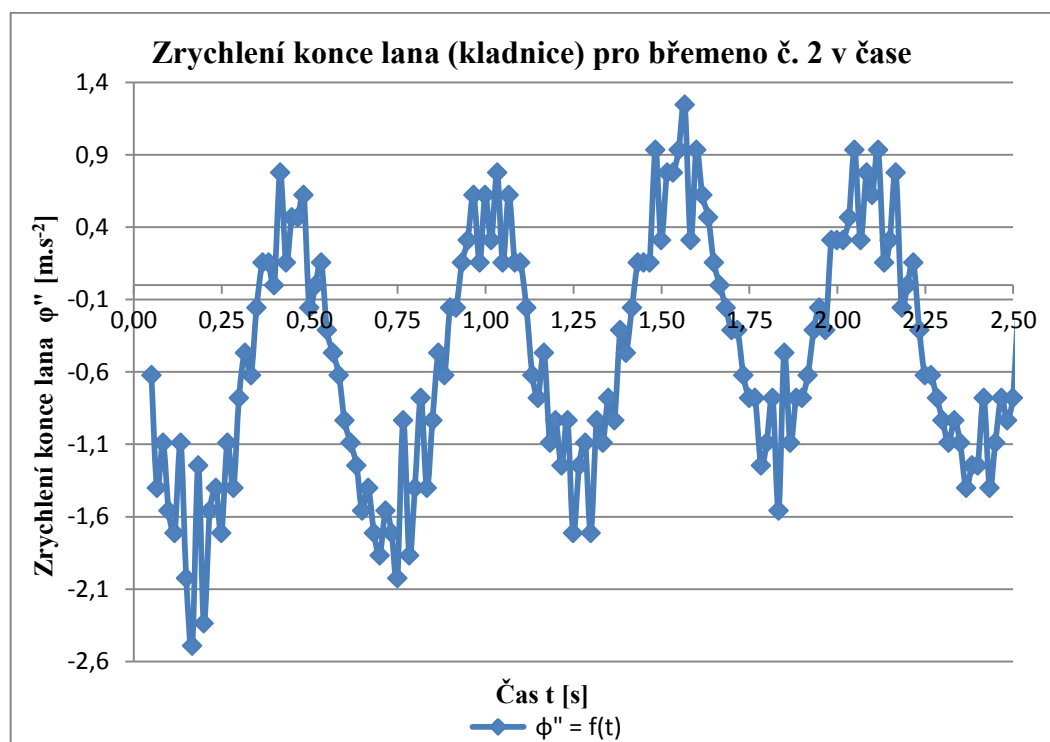
Zdroj: Autor

Obr. 6.12 Fotografie z měření zrychlení pro břemeno válcového tvaru

Pro účely uchycení akcelerometrů na břemeni, jehož válcová plocha neumožňuje přímé lepení, byla z akrylátového skla vyrobena příchytka, která byla vybroušena na vnější poloměr břemene a posléze k břemeni přilepena. Na tuto příchytku byl poté nalepen protikus nalepovacího suchého zipu a následně i pouzdro s akcelerometrem.

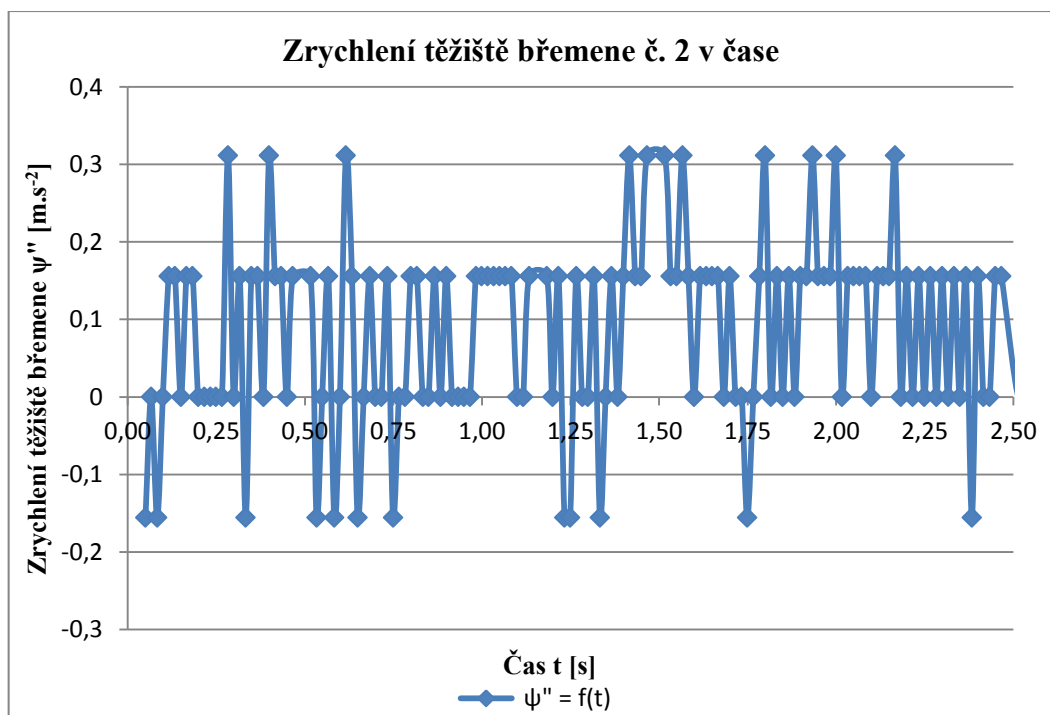
6.2.2 Naměřená data pro břemeno č. 2

Na základě naměřených dat byly v MS Excel 2010 sestrojeny časové závislosti uvedené na obr. 6.13 až obr. 6.15.



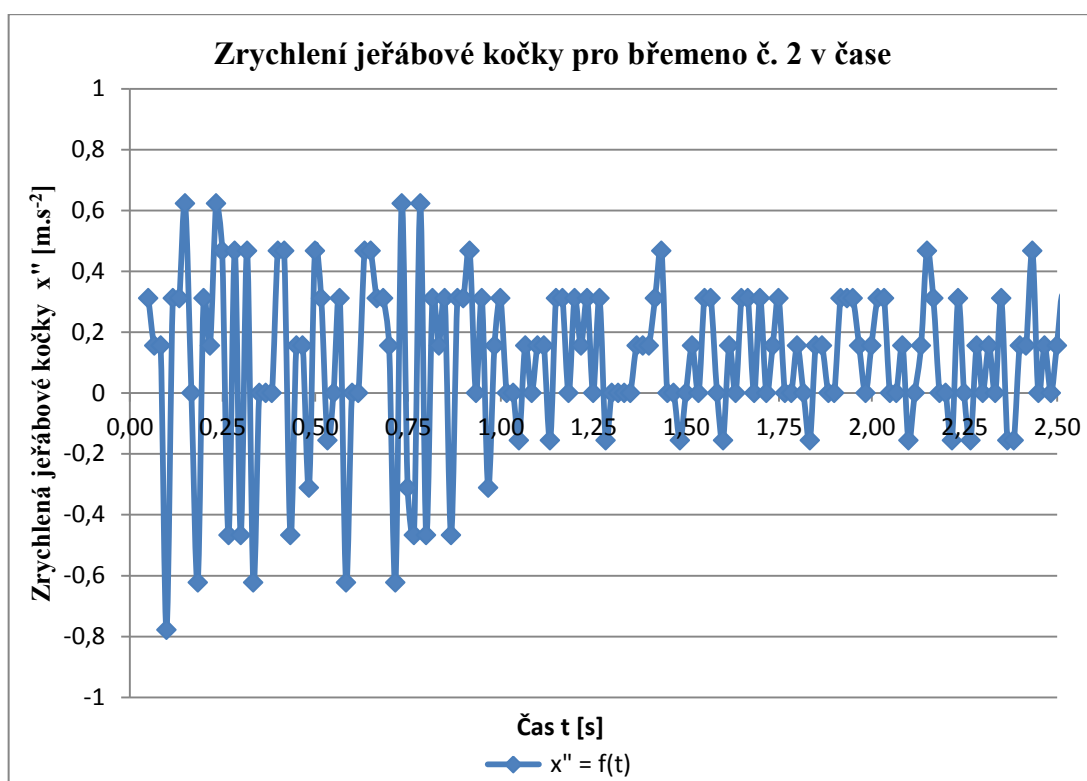
Zdroj: Autor

Obr. 6.13 Zrychlení konce lana v čase



Zdroj: Autor

Obr. 6.14 Zrychlení těžiště břemene č. 2 v čase



Zdroj: Autor

Obr. 6.15 Zrychlení jeřábové kočky pro břemeno č. 2 v čase

Jak vyplývá z obr. 6.13, pro břemeno č. 2, tj. pro břemeno válcového tvaru dosahuje kladnice mnohem vyššího zrychlení než v případě břemene č. 1. Výrazné jsou zejména „nezávislé kmity“ kladnice v jednotlivých amplitudách, které jsou ještě četnější a dosahují vyšších hodnot než v případě břemene č. 1 a korespondují s výsledky teoretickými, kde byla očekávána výraznější četnost kmitů v jednotlivých amplitudách. Průběh zrychlení kladnice je mírně nesymetrický vůči časové ose, uvážíme-li však tuto skutečnost a sečteme-li absolutní hodnoty kladné a záporné složky zrychlení (bez špičkových hodnot), dostaneme po vydělení dvěma hodnotu téměř odpovídající hodnotě maximálního zrychlení dle teoretických výsledků, pro srovnání viz obr. 4.18.

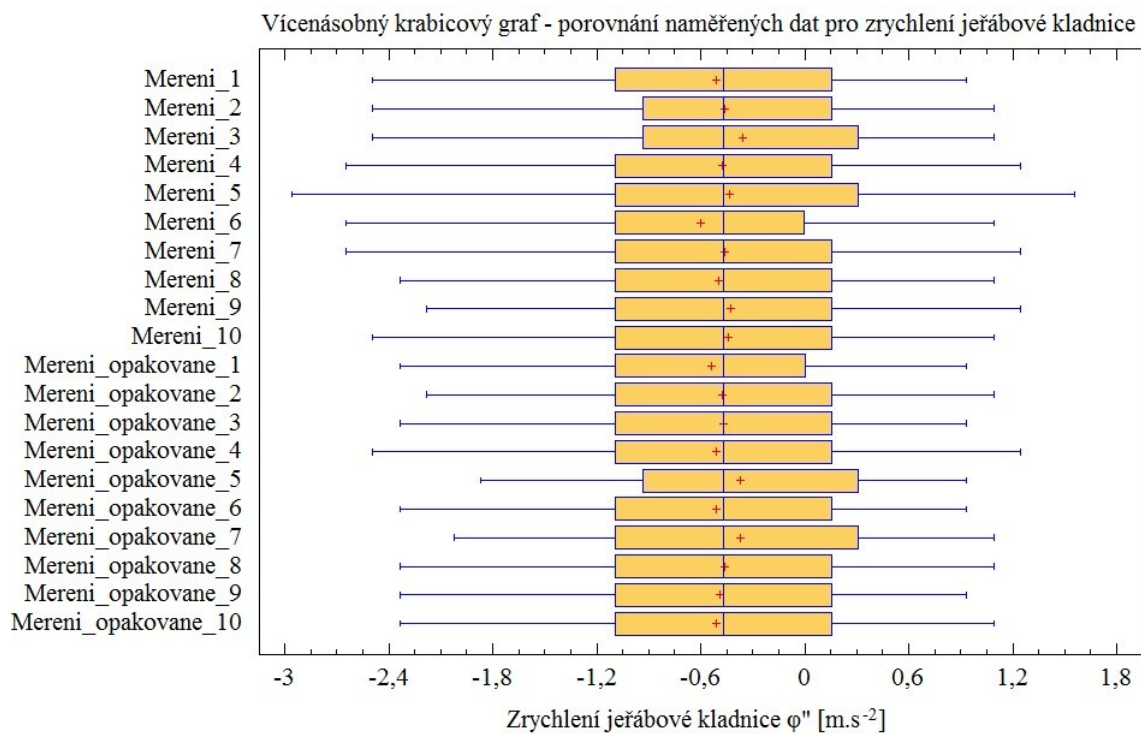
Zrychlení těžiště břemene č. 2 dosahuje vyšších hodnot zrychlení než v případě břemene č. 1, přestože maximálních hodnot dle výsledků teoretických nedosahuje.

Posledním změřeným průběhem zrychlení je zrychlení jeřábové kočky v čase. Dalo se očekávat, vzhledem k většímu momentu setrvačnosti břemene, že zrychlení jeřábové kočky bude menší než v případě břemene č. 1, což také nastalo. Zajímavý je ale téměř periodický průběh zrychlení v prvních třech čtvrtinách sekundy, kdy navíc dosahuje maximálních hodnot, které jsou však přesto menší než hodnoty udávané matematickým popisem. V poslední čtvrtině sekundy pak dochází k ustálení zrychlení jeřábové kočky.

6.2.3 Explorační analýza naměřených dat pro břemeno č. 2

Podobně jako v případě břemene č. 1 je vhodné porovnat naměřené datové soubory a ověřit rozdíl mezi jednotlivými datovými soubory.

Analýza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kladnice



Zdroj: Autor

Obr. 6.16 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Jak vyplývá z krabicového grafu, srovnávané soubory dat (výběrové soubory) představují poměrně homogenní datové soubory s velmi blízkými středními hodnotami a téměř identickými hodnotami interkvartilového rozpětí a rozptyly, jak je uvedeno na obr. 6.17.

Summary Statistics

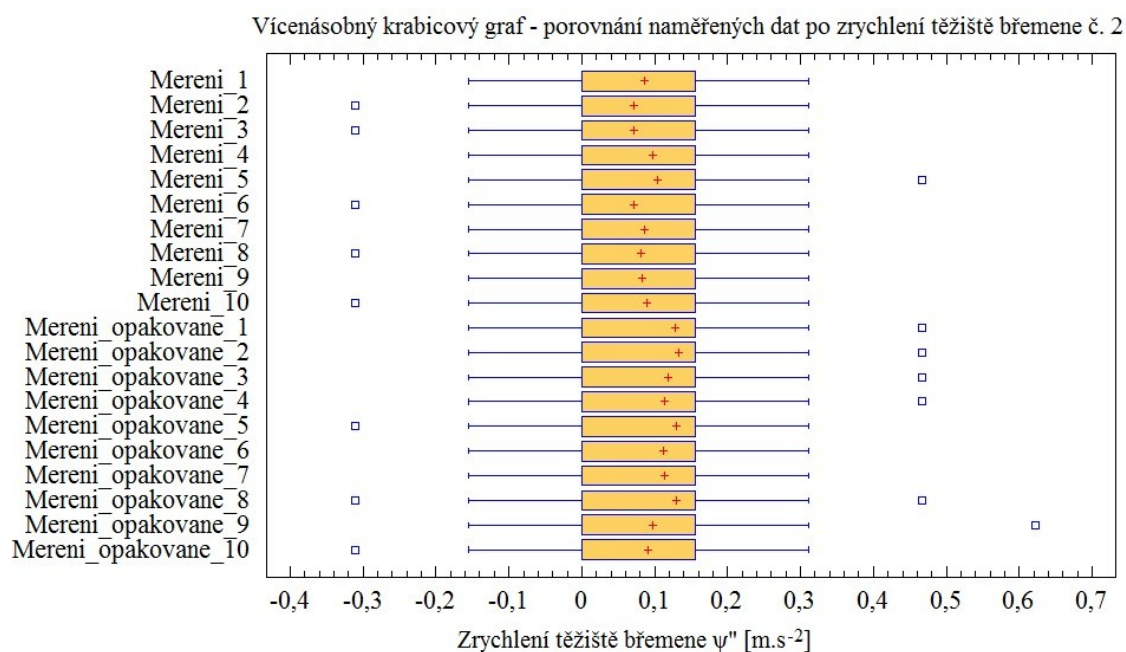
	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	139	-0,508592	-0,467143	0,634137	0,796327	-2,49143
Mereni_2	139	-0,462682	-0,467143	0,610722	0,781487	-2,49143
Mereni_3	139	-0,511953	-0,622857	0,685326	0,827844	-2,64714
Mereni_4	139	-0,472744	-0,467143	0,690655	0,831056	-2,64714
Mereni_5	139	-0,432415	-0,467143	0,692283	0,832035	-2,95857
Mereni_6	139	-0,446978	-0,311429	0,589599	0,767854	-2,49143
Mereni_7	139	-0,460421	-0,467143	0,646891	0,804295	-2,64714
Mereni_8	139	-0,496269	-0,467143	0,609536	0,780728	-2,33571
Mereni_9	139	-0,427934	-0,467143	0,616046	0,784886	-2,18
Mereni_10	139	-0,440257	-0,467143	0,629341	0,79331	-2,49143
Mereni_opakovane_1	139	-0,538839	-0,467143	0,599239	0,774105	-2,33571
Mereni_opakovane_2	139	-0,478345	-0,467143	0,647513	0,804682	-2,18
Mereni_opakovane_3	139	-0,471624	-0,467143	0,593503	0,770391	-2,33571
Mereni_opakovane_4	139	-0,508592	-0,467143	0,616918	0,785441	-2,49143
Mereni_opakovane_5	139	-0,525396	-0,622857	0,508228	0,712901	-2,02429
Mereni_opakovane_6	139	-0,509712	-0,467143	0,585372	0,765096	-2,33571
Mereni_opakovane_7	139	-0,526516	-0,622857	0,563793	0,750861	-2,18
Mereni_opakovane_8	139	-0,462682	-0,467143	0,585772	0,765357	-2,33571
Mereni_opakovane_9	139	-0,491788	-0,467143	0,559176	0,747781	-2,33571
Mereni_opakovane_10	139	-0,511953	-0,467143	0,611882	0,782229	-2,33571
Total	2780	-0,484283	-0,467143	0,610652	0,781442	-2,95857
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,934286	3,42571	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_2	1,09	3,58143	-0,934286	0,155714	1,09	
Mereni_3	0,934286	3,58143	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_4	1,24571	3,89286	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_5	1,55714	4,51571	-1,09	0,311429	1,40143	
Mereni_6	1,24571	3,73714	-0,934286	0,155714	1,09	
Mereni_7	1,24571	3,89286	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_8	1,09	3,42571	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_9	1,24571	3,42571	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_10	1,09	3,58143	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_1	0,934286	3,27	-1,09	0,0	1,09	
Mereni_opakovane_2	1,09	3,27	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_3	0,934286	3,27	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_4	1,24571	3,73714	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_5	0,778571	2,80286	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_6	0,934286	3,27	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_7	0,934286	3,11429	-1,24571	0,155714	1,40143	
Mereni_opakovane_8	1,09	3,42571	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_9	0,934286	3,27	-1,09	0,155714	1,24571	
Mereni_opakovane_10	1,09	3,42571	-1,09	0,155714	1,24571	
Total	1,55714	4,51571	-1,09	0,155714	1,24571	

Zdroj: Autor

Obr. 6.17 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení kladnice pro břemeno č. 2)

Naměřená data zrychlení kladnice dosahují zejména v záporných hodnotách více než třinásobných hodnot, než v případě výsledků teoretických.

Analyza naměřených dat pro zrychlení těžiště břemene č. 2



Obr. 6.18 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Stejně jako pro břemeno č. 1 mají naměřená data zrychlení těžiště břemene totožná interkvartilová rozpětí, totožné minimální a maximální hodnoty (bez odlehlých pozorování), téměř identické rozptyly (viz obr. 6.19), avšak střední hodnoty jako míry polohy opět netvoří „ucelenou řadu.“

Summary Statistics

	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation
Mereni_1	135	0,0853545	0,0	0,0125644	0,112091
Mereni_2	135	0,0715132	0,0	0,0151138	0,122938
Mereni_3	135	0,0715132	0,0	0,01439	0,119958
Mereni_4	135	0,0980423	0,155714	0,0140201	0,118408
Mereni_5	135	0,10381	0,155714	0,0177328	0,133165
Mereni_6	135	0,0715132	0,155714	0,0151138	0,122938
Mereni_7	135	0,0853545	0,155714	0,0143739	0,119891
Mereni_8	135	0,0807407	0,155714	0,0158897	0,125975
Mereni_9	135	0,0830476	0,0	0,012232	0,110599
Mereni_10	135	0,0888148	0,155714	0,0161191	0,126961
Mereni_opakovane_1	135	0,128032	0,155714	0,0147894	0,121612
Mereni_opakovane_2	135	0,133799	0,155714	0,0145348	0,12056
Mereni_opakovane_3	135	0,117651	0,155714	0,0171779	0,131085
Mereni_opakovane_4	135	0,11419	0,155714	0,0163576	0,127897
Mereni_opakovane_5	135	0,130339	0,155714	0,0134652	0,116039
Mereni_opakovane_6	135	0,111884	0,155714	0,0129022	0,113588
Mereni_opakovane_7	135	0,113037	0,155714	0,0135456	0,116385
Mereni_opakovane_8	135	0,129185	0,155714	0,0161191	0,126961
Mereni_opakovane_9	135	0,0968889	0,155714	0,0176846	0,132983
Mereni_opakovane_10	135	0,0911217	0,155714	0,0135295	0,116316
Total	2700	0,100292	0,155714	0,015191	0,123252

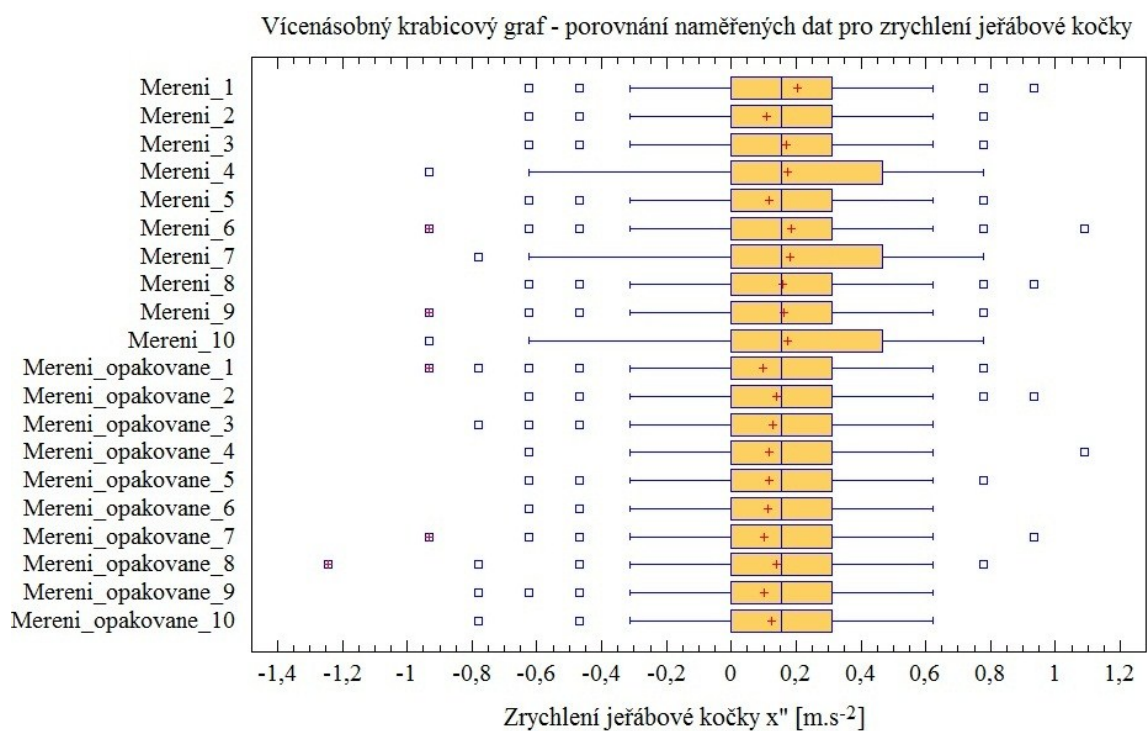
	Minimum	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range
Mereni_1	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_2	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_3	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_4	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_5	-0,155714	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_6	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_7	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_8	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_9	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_10	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_1	-0,155714	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_2	-0,155714	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_3	-0,155714	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_4	-0,155714	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_5	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_6	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_7	-0,155714	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_8	-0,311429	0,467143	0,778571	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_9	-0,155714	0,622857	0,778571	0,0	0,155714	0,155714
Mereni_opakovane_10	-0,311429	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714
Total	-0,311429	0,622857	0,934286	0,0	0,155714	0,155714

Zdroj: Autor

Obr. 6.19 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení těžiště břemene č. 2)

Vzhledem k tomu, že průběh zrychlení těžiště břemene je průběhem periodickým s očekávanou nulovou střední hodnotou, je důležitým kritériem porovnání maximální a minimální hodnoty zrychlení. Jak vyplývá z obr. 6. 18, v kladné části je hodnota max. zrychlení blíží se teoretické hodnotě maxima, přičemž uvažujeme-li skupinu odlehlých pozorování, docházíme k hodnotě totožné. Záporná hodnota max. zrychlení je nižší než hodnota udávaná matematickým popisem.

Analýza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kočky



Obr. 6.20 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Jak vyplývá z obr. 6.20, naměřená data opět představují poměrně homogenní datové soubory s velmi blízkými středními hodnotami a až na tři měření s totožnými interkvartilovými rozpětími.

Summary Statistics

	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	149	0,205877	0,155714	0,0721735	0,268851	-0,622857
Mereni_2	149	0,110777	0,155714	0,0564545	0,237602	-0,622857
Mereni_3	149	0,17139	0,155714	0,0772445	0,277929	-0,622857
Mereni_4	149	0,17557	0,155714	0,0793886	0,28176	-0,934286
Mereni_5	149	0,118092	0,155714	0,0601753	0,245307	-0,622857
Mereni_6	149	0,183931	0,155714	0,078984	0,281041	-0,934286
Mereni_7	149	0,182886	0,155714	0,085104	0,291726	-0,778571
Mereni_8	149	0,159895	0,155714	0,0923829	0,303946	-0,622857
Mereni_9	149	0,161985	0,155714	0,0815481	0,285566	-0,934286
Mereni_10	149	0,17557	0,155714	0,0793886	0,28176	-0,934286
Mereni_opakovane_1	149	0,0961457	0,155714	0,0844047	0,290525	-0,934286
Mereni_opakovane_2	149	0,141083	0,155714	0,0551593	0,23486	-0,622857
Mereni_opakovane_3	149	0,127498	0,155714	0,0632562	0,251508	-0,778571
Mereni_opakovane_4	149	0,117047	0,155714	0,0684504	0,26163	-0,622857
Mereni_opakovane_5	149	0,118092	0,155714	0,0601753	0,245307	-0,622857
Mereni_opakovane_6	149	0,113912	0,155714	0,045424	0,213129	-0,622857
Mereni_opakovane_7	149	0,101371	0,155714	0,0628868	0,250772	-0,934286
Mereni_opakovane_8	149	0,138993	0,155714	0,0793402	0,281674	-1,24571
Mereni_opakovane_9	149	0,100326	0,155714	0,0734203	0,270962	-0,778571
Mereni_opakovane_10	149	0,123317	0,155714	0,0476011	0,218177	-0,778571
Total	2980	0,141188	0,155714	0,0707472	0,265984	-1,24571

	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range
Mereni_1	0,934286	1,55714	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_2	0,778571	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_3	0,778571	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_4	0,778571	1,71286	0,0	0,467143	0,467143
Mereni_5	0,778571	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_6	1,09	2,02429	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_7	0,778571	1,55714	0,0	0,467143	0,467143
Mereni_8	0,934286	1,55714	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_9	0,778571	1,71286	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_10	0,778571	1,71286	0,0	0,467143	0,467143
Mereni_opakovane_1	0,778571	1,71286	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_2	0,934286	1,55714	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_3	0,622857	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_4	1,09	1,71286	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_5	0,778571	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_6	0,622857	1,24571	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_7	0,934286	1,86857	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_8	0,778571	2,02429	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_9	0,622857	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Mereni_opakovane_10	0,622857	1,40143	0,0	0,311429	0,311429
Total	1,09	2,33571	0,0	0,311429	0,311429

Zdroj: Autor

Obr. 6.21 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení jeřábové kočky pro břemeno č. 2)

Dle souhrnné statistiky na obr. 6.21 lze usoudit, že větší moment setrvačnosti břemene č. 2 má při jeho stejné hmotnosti zásadní vliv jak na zrychlení kladnice, tak i na zrychlení jeřábové kočky. Vyšší hodnoty zrychlení břemene, obzvláště kmity dílčí kmity, ovlivňují změny rychlosti jeřábové kočky v čase. Lze říci, že čím větší je moment setrvačnosti břemene, tím větší bude zrychlení břemene a taktéž ovlivnění pohybu kočky, jinými slovy, zrychlení jeřábové kočky bude více rázovité.

6.3 Provedení měření zrychlení břemene č. 2 s delším závěsem

6.3.1 Základní informace o realizovaném měření

Jako poslední bylo provedeno měření zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene č. 2 s dlouhým závěsem pro účely porovnání kmitání břemene č. 2 pro různé délky závěsu. Modifikované břemeno č. 2 bylo detailně představeno v kap. 4.8.5 a teoretické výsledky v kap. 4.8.6, na které tato kapitola rovněž navazuje. Délka odvinutého lana zůstala zachována z předchozího měření, tzn. $l = 1,155$ m a vzdálenost od těžiště břemene k jeřábovému háku činí $r_{s2} = 0,6065$ m.



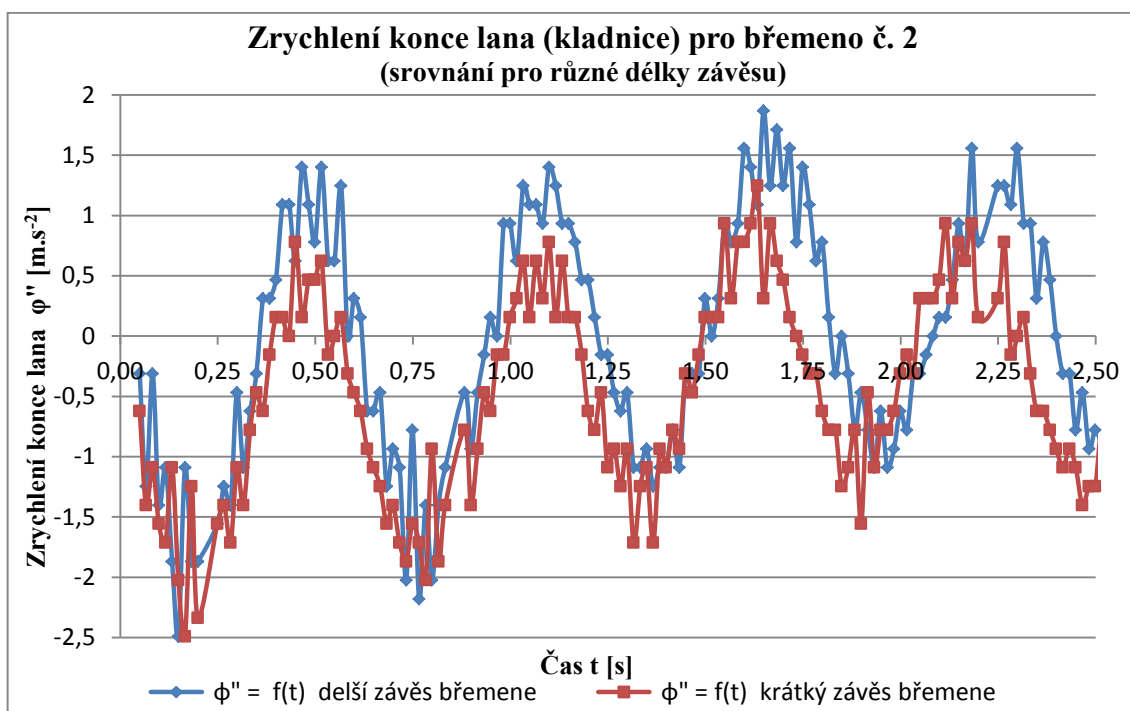
Zdroj: Autor

Obr. 6.22 Fotografie z měření zrychlení pro břemeno válcového tvaru s delším závěsem

Z obr. 6.22 je patrné břemeno č. 2 s modifikovaným závěsem, přičemž dosažená vzdálenost r_s [m] dosahuje přesně 1,75 násobku původní hodnoty. Spojovací matice byly proti možnému pootočení (a tím nežádoucí změně vzdálenosti r_s [m]) pojištěny jednak kontramaticí, jednak nanesením tenké vrstvy lepidla na první tři závity obou spojovacích matic. Nutno podotknout, že dlouhý závěs břemene velmi ovlivňuje stabilitu a chování břemene.

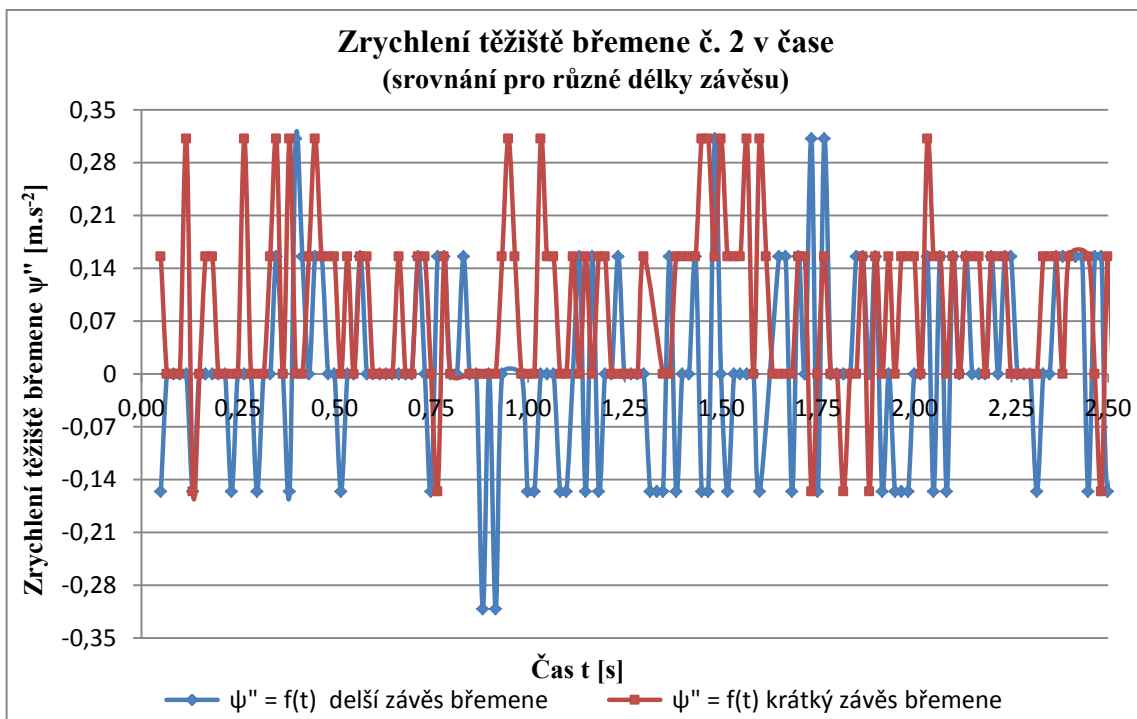
6.3.2 Naměřená data pro břemeno č. 2 s delším závěsem

Na základě naměřených dat byly v MS Excel 2010 sestrojeny časové závislosti uvedené na obr. 6.23 až obr. 6.25.



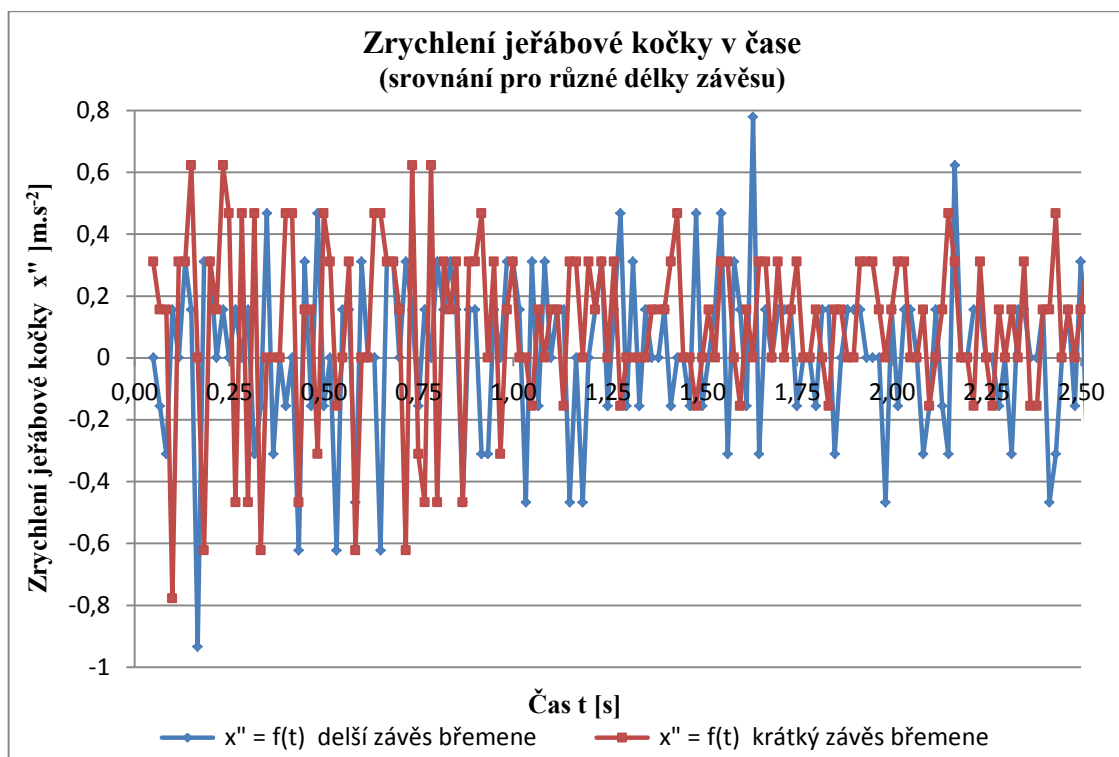
Zdroj: Autor

Obr. 6.23 Zrychlení konce lana v čase pro břemeno č. 2 s různou délkou závěsu



Zdroj: Autor

Obr. 6.24 Zrychlení těžiště břemene č. 2 pro různé délky závěsu břemene



Zdroj: Autor

Obr. 6.25 Zrychlení jeřábové kočky pro různé délky závěsu břemene č. 2

Jak vyplývá z obr. 6.23, zrychlení kladnice dosahuje pro břemeno s delším závěsem vyšších hodnot, zejména tedy kladná složka zrychlení. Obdobně jako v případě teoretických výsledků je průběh zrychlení kladnice pro břemeno s delším závěsem posunut, přičemž čím větší je úsek na časové ose, tím větší je posunutí sledovaných průběhů. Nejvíce patrný je rozdíl v čase od jedné a půl až jedné a třetí čtvrtiny druhé sekundy na časové ose grafu z obr. 6.23, kdy posunutí průběhů dosahuje maxima. V případě zrychlení jeřábové kladnice je tedy ve velké míře dosaženo shody s teoretickými výsledky.

Zrychlení těžiště břemene č. 2 s delším závěsem sice nabývá nepatrně vyšších hodnot než břemeno č. 2 s krátkým závěsem, viz obr. 6.24, nicméně nedosahuje hodnot výsledků teoretických. Rovněž posunutí průběhů zrychlení není tak evidentní, jako tomu bylo v případě zrychlení kladnice či výsledků teoretických.

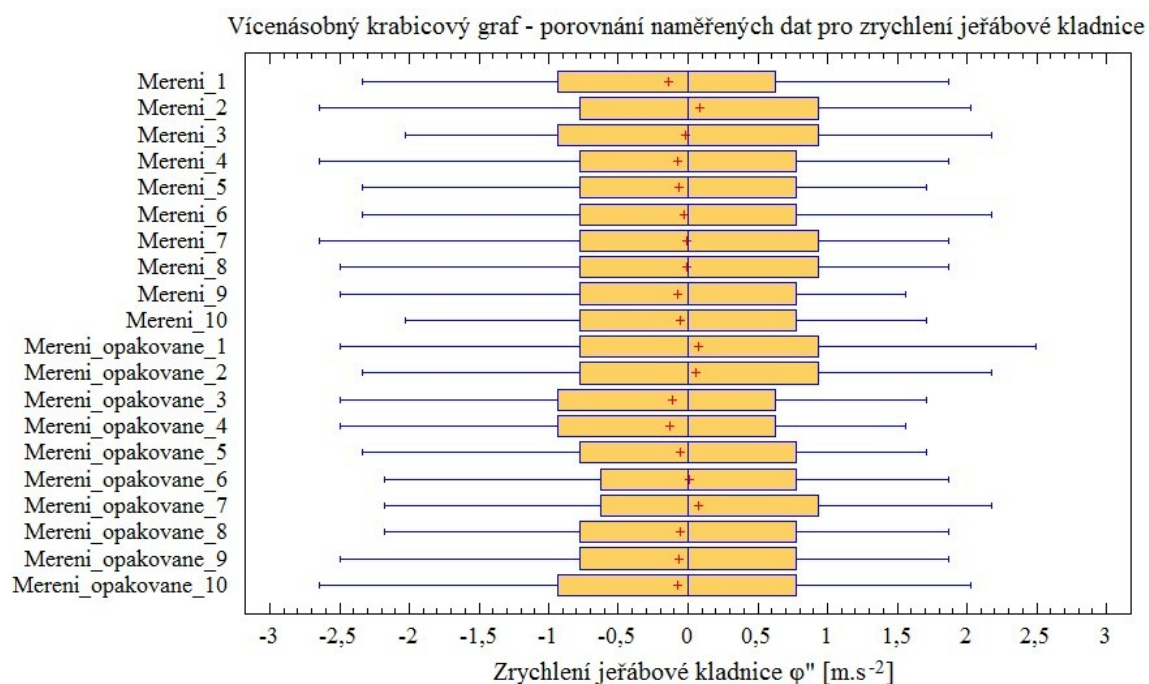
V případě zrychlení jeřábové kočky lze na obr. 6.25 vidět mírné posunutí průběhů zrychlení, kdy kočka dosáhne pro břemeno s krátkým závěsem maximálního zrychlení dříve než v případě břemene s delším závěsem. Tento jev lze pak pozorovat v téměř celém časovém průběhu. Maximální dosažené hodnoty jsou jen mírně odlišné od hodnot teoretických. Co se vlastních průběhů týče, opět jsou zřejmé výkyvy zrychlení dané již zmíněnými rušivými vlivy, jež byly blíže popsány v kap. 6.1.2.

6.3.3 Explorační analýza naměřených dat - břemeno č. 2 s dlouhým závěsem

Naměřená data zrychlení jeřábové kladnice, těžiště břemene a jeřábové kočky pro břemeno č. 2 s dlouhým závěsem jsou posledními naměřenými daty, která zde budou porovnávána.

Vzhledem k již zmíněné citlivosti břemene č. 2 s dlouhým závěsem, zejména co se uklidnění břemene týče, nabývá porovnání naměřených dat pro oba dva soubory měření náležitého významu.

Analýza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kladnice



Zdroj: Autor

Obr. 6.26 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Z obr. 6.26 je zřejmé, že uvedená měření představují homogenní soubor dat s velmi podobnými interkvartilovými rozpětími a taktéž blízkými středními hodnotami.

Zajímavostí je, že ačkoli dosahují naměřené hodnoty minimálního a maximálního zrychlení vyšších hodnot než výsledky teoretické, tyto teoretické výsledky ve většině provedených měření korespondují s horním a dolním kvantilem, tj. hraničními body interkvartilového rozpětí.

Summary Statistics

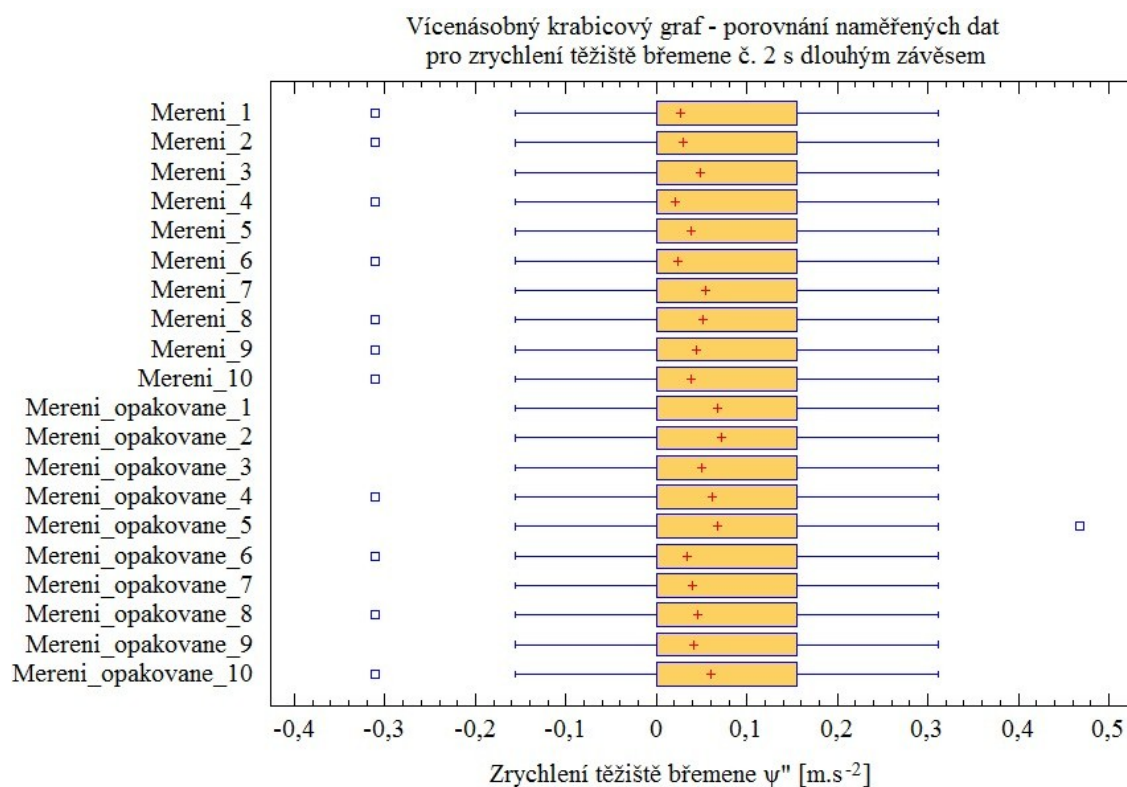
	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	139	-0,140031	0,0	1,0248	1,01232	-2,33571
Mereni_2	139	0,088259	0,0	0,987157	0,993558	-2,64714
Mereni_3	139	-0,0179239	0,0	1,02191	1,0109	-2,02429
Mereni_4	139	-0,0784173	0,0	1,00184	1,00082	-2,64714
Mereni_5	139	-0,0827338	0,0	0,925151	0,961847	-2,33571
Mereni_6	139	-0,0246454	0,0	0,883874	0,940146	-2,33571
Mereni_7	139	-0,0100822	0,0	1,03481	1,01716	-2,64714
Mereni_8	139	-0,0100822	0,0	0,985764	0,992857	-2,49143
Mereni_9	139	-0,0739363	0,0	0,875466	0,935663	-2,49143
Mereni_10	139	-0,0560123	0,0	0,928414	0,963543	-2,02429
Mereni_opakovane_1	139	0,0750565	0,0	1,07577	1,0372	-2,49143
Mereni_opakovane_2	139	0,0537718	0,0	1,03268	1,01621	-2,33571
Mereni_opakovane_3	139	-0,115385	0,0	0,988621	0,994294	-2,49143
Mereni_opakovane_4	139	-0,131069	0,0	0,929557	0,964135	-2,49143
Mereni_opakovane_5	139	-0,0537718	0,0	0,941664	0,970394	-2,33571
Mereni_opakovane_6	139	0,00896197	0,0	0,932548	0,965685	-2,18
Mereni_opakovane_7	139	0,0739363	0,0	0,9591	0,979337	-2,18
Mereni_opakovane_8	139	-0,0537718	0,0	0,97329	0,986555	-2,18
Mereni_opakovane_9	139	-0,0672148	0,0	0,933349	0,9661	-2,49143
Mereni_opakovane_10	139	-0,0750565	0,0	1,02025	1,01008	-2,64714
Total	2780	-0,0336074	0,0	0,970371	0,985074	-2,64714
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	1,86857	4,20429	-0,934286	0,622857	1,55714	
Mereni_2	2,02429	4,67143	-0,778571	0,934286	1,71286	
Mereni_3	2,18	4,20429	-0,934286	0,934286	1,86857	
Mereni_4	1,86857	4,51571	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_5	1,71286	4,04857	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_6	2,18	4,51571	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_7	1,86857	4,51571	-0,778571	0,934286	1,71286	
Mereni_8	1,86857	4,36	-0,778571	0,934286	1,71286	
Mereni_9	1,55714	4,04857	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_10	1,71286	3,73714	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_opakovane_1	2,49143	4,98286	-0,778571	0,934286	1,71286	
Mereni_opakovane_2	2,18	4,51571	-0,778571	0,934286	1,71286	
Mereni_opakovane_3	1,71286	4,20429	-0,934286	0,622857	1,55714	
Mereni_opakovane_4	1,55714	4,04857	-0,934286	0,622857	1,55714	
Mereni_opakovane_5	1,71286	4,04857	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_opakovane_6	1,86857	4,04857	-0,622857	0,778571	1,40143	
Mereni_opakovane_7	2,18	4,36	-0,622857	0,934286	1,55714	
Mereni_opakovane_8	1,86857	4,04857	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_opakovane_9	1,86857	4,36	-0,778571	0,778571	1,55714	
Mereni_opakovane_10	2,02429	4,67143	-0,934286	0,778571	1,71286	
Total	2,49143	5,13857	-0,778571	0,778571	1,55714	

Zdroj: Autor

Obr. 6.27 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení kladnice pro břemeno č. 2 s dlouhým závěsem)

Z uvedeného textového výpisu dat je dále zřejmé, že naměřená data vykazují téměř identické rozptyly, což svědčí o jejich nízké rozptýlenosti. A čím nižší je rozptýlenost hodnot proměnné kolem pomyslného středu, tím větší je schopnost tohoto středu reprezentovat celou proměnnou, jak je uvedeno v [15].

Analýza naměřených dat pro zrychlení těžiště břemene č. 2 s dlouhým závěsem



Zdroj: Autor

Obr. 6.28 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Naměřená data pro zrychlení těžiště břemene jsou pro všechna uskutečněná měření jakousi výjimkou mezi ostatními měřeními. Stejně jako pro břemeno č. 2 s krátkým závěsem, nebo břemeno č. 1, je zde patrný jistý rozdíl mezi daty naměřenými a daty teoretickými. Tato skutečnost bude blíže vysvětlena v následující kapitole.

Summary Statistics

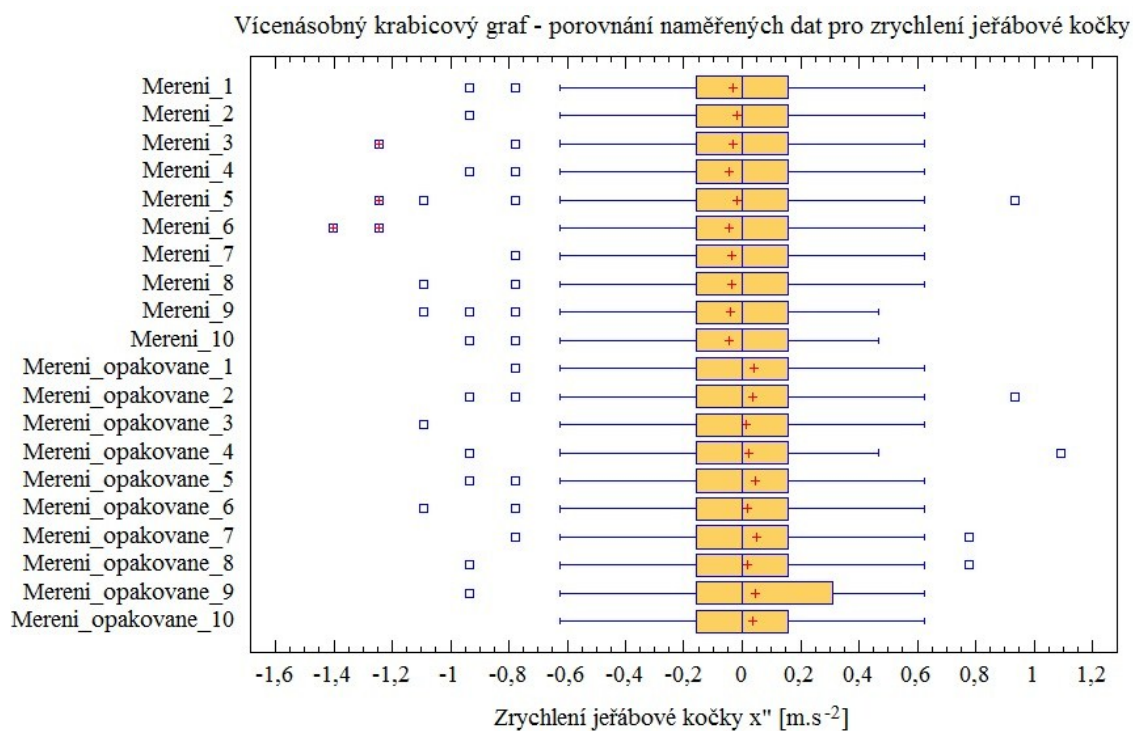
	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	135	0,0265291	0,0	0,0146715	0,121126	-0,311429
Mereni_2	135	0,028836	0,0	0,0134571	0,116005	-0,311429
Mereni_3	135	0,0484444	0,0	0,0142828	0,119511	-0,155714
Mereni_4	135	0,0207619	0,0	0,0136796	0,11696	-0,311429
Mereni_5	135	0,0380635	0,0	0,0139209	0,117987	-0,155714
Mereni_6	135	0,0230688	0,0	0,0143015	0,119589	-0,311429
Mereni_7	135	0,0542116	0,0	0,0124197	0,111444	-0,155714
Mereni_8	135	0,0507513	0,0	0,0154998	0,124498	-0,311429
Mereni_9	135	0,0438307	0,0	0,0150736	0,122775	-0,311429
Mereni_10	135	0,0380635	0,0	0,0160922	0,126855	-0,311429
Mereni_opakovane_1	135	0,0680529	0,155714	0,0128861	0,113517	-0,155714
Mereni_opakovane_2	135	0,0715132	0,0	0,0158376	0,125847	-0,155714
Mereni_opakovane_3	135	0,0495979	0,0	0,0118165	0,108704	-0,155714
Mereni_opakovane_4	135	0,0611323	0,0	0,0145106	0,12046	-0,311429
Mereni_opakovane_5	135	0,0668995	0,0	0,0146715	0,121126	-0,155714
Mereni_opakovane_6	135	0,0346032	0,0	0,0179741	0,134068	-0,311429
Mereni_opakovane_7	135	0,0403704	0,0	0,0133767	0,115658	-0,155714
Mereni_opakovane_8	135	0,0461376	0,0	0,0148645	0,12192	-0,311429
Mereni_opakovane_9	135	0,0415238	0,0	0,0145482	0,120616	-0,155714
Mereni_opakovane_10	135	0,0599788	0,0	0,0141085	0,118779	-0,311429
Total	2700	0,0456185	0,0	0,014511	0,120462	-0,311429
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_2	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_3	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_4	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_5	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_6	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_7	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_8	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_9	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_10	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_1	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_2	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_3	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_4	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_5	0,467143	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_6	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_7	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_8	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_9	0,311429	0,467143	0,0	0,155714	0,155714	
Mereni_opakovane_10	0,311429	0,622857	0,0	0,155714	0,155714	
Total	0,467143	0,778571	0,0	0,155714	0,155714	

Zdroj: Autor

Obr. 6.29 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení těžiště břemene č. 2 s dlouhým závěsem)

Ze souhrnu statistických dat uvedených na obr. 6.29 je zřejmá pouze jedna hodnota převyšující teoretickou hodnotu max. zrychlení pro břemeno č. 2 s krátkým závěsem, nicméně hodnoty max. zrychlení pro dlouhý závěs břemene č. 2 dosaženo nebylo.

Analyza naměřených dat pro zrychlení jeřábové kočky



Obr. 6.30 Vícenásobný krabicový graf pro účely porovnání naměřených hodnot

Podobně jako v případě předchozích měření zrychlení jeřábové kočky je zřejmá přítomnost odlehlých pozorování, navíc s opětovnou převahou v záporných hodnotách zrychlení, jak ukazuje obr. 6.30.

Summary Statistics

	Count	Average	Median	Variance	Standard deviation	Minimum
Mereni_1	149	-0,033442	0,0	0,0624404	0,249881	-0,934288
Mereni_2	149	-0,0198562	0,0	0,0698884	0,26438	-0,934288
Mereni_3	149	-0,0313519	0,0	0,0645427	0,254053	-1,24571
Mereni_4	149	-0,0449377	0,0	0,0590758	0,243055	-0,934288
Mereni_5	149	-0,0188111	0,0	0,0750059	0,273872	-1,24571
Mereni_6	149	-0,0470278	0,0	0,0962357	0,310219	-1,40143
Mereni_7	149	-0,0385772	0,0	0,0584513	0,241787	-0,778571
Mereni_8	149	-0,0385772	0,0	0,0820429	0,286431	-1,09
Mereni_9	149	-0,0407574	0,0	0,0781131	0,279487	-1,09
Mereni_10	149	-0,0428476	0,0	0,0802435	0,245448	-0,934288
Mereni_opakovane_1	149	0,0418025	0,0	0,0778624	0,279038	-0,778571
Mereni_opakovane_2	149	0,0344871	0,0	0,0982478	0,313445	-0,934288
Mereni_opakovane_3	149	0,0146309	0,0	0,0868274	0,258123	-1,09
Mereni_opakovane_4	149	0,0209012	0,0	0,0739393	0,271918	-0,934288
Mereni_opakovane_5	149	0,0438926	0,0	0,0845757	0,254117	-0,934288
Mereni_opakovane_6	149	0,0188111	0,0	0,0779548	0,279204	-1,09
Mereni_opakovane_7	149	0,0480729	0,0	0,0733632	0,270856	-0,778571
Mereni_opakovane_8	149	0,016721	0,0	0,0885274	0,291777	-0,934288
Mereni_opakovane_9	149	0,0459827	0,0	0,0847016	0,291035	-0,934288
Mereni_opakovane_10	149	0,0365772	0,0	0,0695917	0,263802	-0,622857
Total	2980	-0,00151534	0,0	0,0738617	0,271775	-1,40143
	Maximum	Range	Lower quartile	Upper quartile	Interquartile range	
Mereni_1	0,622857	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_2	0,622857	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_3	0,622857	1,88857	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_4	0,622857	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_5	0,934288	2,18	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_6	0,622857	2,02429	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_7	0,622857	1,40143	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_8	0,622857	1,71288	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_9	0,467143	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_10	0,467143	1,40143	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_1	0,622857	1,40143	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_2	0,934288	1,88857	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_3	0,622857	1,71288	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_4	1,09	2,02429	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_5	0,622857	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_6	0,622857	1,71288	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_7	0,778571	1,55714	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_8	0,778571	1,71288	-0,155714	0,155714	0,311429	
Mereni_opakovane_9	0,622857	1,55714	-0,155714	0,311429	0,467143	
Mereni_opakovane_10	0,622857	1,24571	-0,155714	0,155714	0,311429	
Total	1,09	2,49143	-0,155714	0,155714	0,311429	

Zdroj: Autor

Obr. 6.31 Explorační analýza dat – textový výpis statistik
(zrychlení jeřábové kočky pro břemeno č. 2 s dlouhým závěsem)

Co se týče hodnoty maximálního zrychlení jeřábové kočky, tak dle statistického souhrnu na obr. 6.31 je maximální dosažená hodnota mírně vyšší, než hodnota teoretická. Tedy v případě, že uvažujeme odlehlá pozorování.

6.4 Srovnání naměřených hodnot zrychlení s hodnotami teoretickými

V tab. 6.1 jsou uvedeny hodnoty max. zrychlení sledovaných částí, tj. jeřábové kladnice (konce lana), těžiště břemene a zrychlení jeřábové kočky.

Tab. 6.1 Srovnání naměřených hodnot maximálního zrychlení s hodnotami teoretickými

Uvažované břemeno		Břemeno č. 1 KVÁDR		Břemeno č. 2 VÁLEC			
				Krátký závěs		Delší závěs	
Zrychlení	Uvažovaná část	[m.s ⁻²]					
		Teoretická data (numerické řešení)	Naměřená data	Teoretická data (numerické řešení)	Naměřená data	Teoretická data (numerické řešení)	Naměřená data
\ddot{x}	Jeřábová kočka	0,9446	1,0277	0,9351	1,09	0,9351	0,6773
$\ddot{\varphi}$	Jeřábová kladnice	±0,9446	1,09 -1,2457	±0,9351	1,0822 -2,4135	±0,9351	1,9153 -2,6471
$\ddot{\psi}$	Těžiště břemene	±0,1799	0,2647 -0,3192	±0,4421	0,3737 -0,3114	±0,6478	0,3192 -0,3114

Zdroj: Autor

Hodnoty uvedené v tab. 6.1 jsou získány z textových výpisů explorační analýzy pro jednotlivá měření, přičemž jedná se vždy o hodnoty maximální a to jak pro kladné hodnoty zrychlení, tak pro hodnoty záporné.

Kritériem pro výběr ze sloupce dat byl vždy požadavek, aby daná hodnota byla v odpovídajícím sloupci dat (sloupce *Minimum*, *Maximum*) alespoň dvakrát. V případě, že tomu tak nebylo, byla hodnota maximálního zrychlení vypočtena jako výběrový průměr.

Naměřeným hodnotám maximálního zrychlení, včetně komentářů a závěrů z měření, je věnována následující kapitola.

6.5 Závěry vyplývající z provedených měření

Uskutečněná měření, resp. jejich výsledky, detailně popsané ve výše uvedených kapitolách, až na výjimku potvrdily správnost nově přijatého matematického popisu pohybu jeřábové kočky s břemenem se třemi stupni volnosti. Níže jsou uvedeny závěry k jednotlivým souborům provedených měření.

Největší shodu s teoretickými daty vykazují měření zrychlení konce lana, resp. jeřábové kladnice jak pro břemeno č. 1, tak pro břemeno č. 2 s krátkým i delším závěsem. Tato měření obsahují jen minimální počet odlehlých pozorování, homogenita naměřených dat dosahuje velmi vysoké úrovně, byť naměřené hodnoty maximálního a minimálního zrychlení jsou vyšší než hodnoty teoretické.

Byl prokázán zřejmý vliv jak tvaru břemene, tak délky závěsu břemene na zrychlení jeřábové kladnice (konce lana). Lze konstatovat, že čím vyšší je hmotový moment setrvačnosti břemene, tím větších hodnot nabývá zrychlení kladnice. Co se týče délky závěsu, tak s rostoucí délkou závěsu hodnota maximálního zrychlení kladnice rovněž narůstá, zároveň se však prodlužuje čas, během kterého dosáhne kladnice maximálního zrychlení.

V délce závěsu břemene lze spatřit jistou analogii k délce ramen páky. Na jedné straně je na jednom ramenu o určité délce zavěšené břemeno o jisté hmotnosti a momentu setrvačnosti, na straně druhé je délka odvinutého lana a jeřábová kočka, opět jisté hmotnosti a jistých parametrů. Kladnice je poté jakousi osou rotace páky. Je zřejmé, že všechny výše uvedené parametry vstupující do výpočtu jsou spolu v interakci a změna každého z nich znamená změnu chování celého systému.

Naměřená data zrychlení jeřábové kočky jsou taktéž velmi blízká hodnotám teoretickým, byť časové průběhy sestavené z naměřených dat nejsou tak vyhlazené, jako tomu bylo v případě zrychlení kladnice či dat teoretických, nicméně jsou periodické a lze v nich rozpoznat vliv tvaru břemene na zrychlení jeřábové kočky a vliv délky závěsu břemene. Jak již bylo zmíněno v kap. 4.8.6, delší závěs břemene způsobuje posunutí průběhu zrychlení v čase směrem od počátku.

Ve většině měření lze z krabicových grafů odečíst právě hodnotu zrychlení kočky odpovídající hodnotě teoretické, byť je tato hodnota často považována za odlehlé pozorování.

V kap. 6.1.2 jsou zmíněny nežádoucí jevy, které negativně ovlivňují měření zrychlení a tudíž i samotná naměřená data. Nejvíce rušivým faktorem je bezesporu

ozubený převod, přenášející krouticí moment z pastorku elektromotoru pojezdu na ozubené věnce pojezdových kol. Velmi záleží na tom, zdali při rozjezdu je ozubení již v kontaktu. Vůle v přímém nekorigovaném a již opotřebovaném ozubení, obzvláště uvážíme-li stáří jeřábové kočky převyšující dvě desetiletí, má na svědomí jednak špičkové hodnoty zrychlení, jednak neharmonický průběh zrychlení. Negativní vliv má také již zmíněné tření nákolků o bok spodní pásnice hlavního nosníku, jednak samotný povrch dráhy. Uvážíme-li, že hlavní nosník je tvořen symetrickým I profilem, tj. za tepla válcovanou tyčí, neobrobenou, navíc v méně přesném provedení A, je zřejmé, že povrch spodní pásnice nejenže zvyšuje pojezdové odpory, ale navíc způsobuje kolísání zrychlení kočky, které nastává při přejezdu pojezdových kol přes nerovnosti profilu.

Onou v úvodní části zmíněnou výjimkou jsou naměřená data zrychlení těžiště břemene. Nutno podotknout, že shody s daty teoretickými se ne zcela podařilo dosáhnout. Ačkoli časové průběhy připomínají více či méně průběhy teoretické, hodnoty maximálního zrychlení se však liší jen minimálně, pokud vůbec. Navíc, naměřená data jsou poněkud rozkolísaná, což je zřejmě způsobeno malou hmotností břemene. Nicméně, v případě břemene o hmotnosti odpovídající nosnosti jeřábové kočky by zase bylo velmi obtížné zaznamenat změnu zrychlení těžiště břemene, neboť s rostoucí hmotností břemene se průběh zrychlení těžiště břemene stává vyrovnanějším, s méně četnými změnami zrychlení vztaženými na jednotku času.

Co se týče vlivu délky závěsu břemene, nebyl zaznamenán výrazný vliv délky závěsu na zrychlení těžiště břemene. Jak již bylo uvedeno výše, délka závěsu mnohem výrazněji ovlivňuje zrychlení jeřábové kladnice.

Tato skutečnost je s největší pravděpodobností zapříčiněna právě přítomností kladnice, která je z tohoto pohledu jakýmsi mezikrokem mezi břemenem a jeřábovou kočkou. Jinými slovy, matematický popis pohybu kočky s břemenem uvažuje lanový závěs, stejně jako závěs břemene za tuhý a nehmotný a neuvažuje tření v závěsu břemene. Naproti tomu, jeřábová kladnice, která je konkrétně pro použitou jeřábovou kočku v uspořádání 2/1, tzn. dva nosné průřezy, zcela jistě tlumí kmitavý pohyb břemene. O kladnici v uspořádání 4/1, kdy jsou během vychýlení lanového závěsu dva krajní nosné průřezy namáhány tlakem, zbylé dva tahem, ani nemluvě. Je ale velmi pravděpodobné, že pro jednoduchý lanový závěs, typický pro jeřábové kočky s malou nosností, na jehož konci není kladnice, ale již přímo jeřábový hák (konec lana), by se naměřená data mnohem více přiblížila hodnotám teoretickým.

Z dílčích závěrů učiněných na základě jednotlivých měření je možno konstatovat, že zpřesněný matematický popis pohybu kočky s břemenem dosahuje ve velké míře shody s naměřenými daty, a tudíž je možné jej verifikovat.

Je tedy zřejmé, že hodnota zrychlení jeřábové kočky vycházející z výpočtů uvedených v kap. 4.5 bude s velkou pravděpodobností odpovídat skutečnosti a lze ji tedy použít jako řídicí prvek pro nastavení rozběhové rampy měniče kmitočtu pro účely řízení rozběhu mostového jeřábu (jeřábové kočky) s ohledem na kývání břemene.

7. ZÁVĚR

Disertační práce na téma „Řízení rozběhu mostového jeřábu s ohledem na kývání břemene“ se zabývá problematikou jevu nazývaného kývání břemene při rozjezdu mostového jeřábu či jeřábové kočky.

V úvodní části disertační práce je uvedena definice problému kývání břemene s ohledem na náběhové úhly lana na drážkovaný lanový buben včetně popisu současného stavu, tj. systémů a prostředků potlačujících kývání břemene, které jsou v současné době k dispozici na evropském trhu.

Na základě popisu současného stavu řešené problematiky jsou specifikovány cíle disertační práce.

V následující části disertační práce je přijat zpřesněný matematický popis pohybu kočky s břemenem, kdy je mj. uvažován třetí stupeň volnosti, prostřednictvím kterého je zohledněn tvar zavěšeného břemene.

Matematický popis pohybu kočky s břemenem, resp. jeho aproximované a numerické řešení umožňuje na základě deseti vstupních veličin vykreslit průběhy vychýlení a zrychlení hledaných veličin a na jejich základě okamžitě vypočítává největší možné zrychlení jeřábové kočky s ohledem na hodnoty úhlů vychýlení lana a břemene, přičemž hodnoty těchto úhlů je možné ve výpočtu nastavit.

Bylo dosaženo velmi vysoké přesnosti aproximovaného řešení, jehož přesnost výrazně neklesá ani pro vyšší hodnoty úhlů vychýlení lana či břemene. Míra shody s řešením numerickým je pro všechny tři stupně volnosti na velmi vysoké úrovni.

Následující část disertační práce pojednává o konstrukčním návrhu a stavbě experimentálního měřicího pracoviště, které bylo postaveno za účelem verifikace nově zvoleného matematického popisu pohybu kočky s břemenem. Při návrhu bylo vycházeno z omezené půdorysné dispozice, z tohoto důvodu nemohl být realizován mostový jeřáb jako celek, ale pouze jeřábová kočka, což však nemá na řešenou problematiku negativní vliv.

Poslední částí této disertační práce je provedení měření pro účely verifikace nově zvoleného matematického popisu pohybu kočky s břemenem. Bylo provedeno měření zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice (konce lana) a těžiště břemene pro dvě tvarově odlišná břemena, navíc pro břemeno válcového tvaru s možností změny délky

závěsu. Bylo zjištěno, že naměřená data zrychlení kladnice a jeřábové kočky se ve velké míře shodují s daty teoretickými a to jak hodnotami, tak vlastními průběhy zrychlení. Nicméně, výraznější vliv tvaru břemene, stejně jako délky závěsu břemene na zrychlení těžiště břemene se nepodařilo prokázat, je však zřejmé, že na zrychlení jeřábové kladnice má tvar břemene, stejně jako délka závěsu břemene, vliv opravdu výrazný.

7.1 Přínos disertační práce

Hlavním přínosem této disertační práce je představení inovovaného matematického popisu pohybu kočky s břemenem se třemi stupni volnosti.

Na základě vyřešených pohybových rovnic je možné jak v aproximovaném, tak numerickém řešení zjistit pro určité břemeno časový průběh ujeté dráhy (vychýlení) a zrychlení jeřábové kočky, jeřábové kladnice a těžiště břemene. Dále je možné do výpočtu nastavit maximální dovolené úhly vychýlení jak těžiště břemene, tak jeřábové kladnice, a na základě těchto a zbývajících vstupních dat dojde k výpočtu hodnoty zrychlení jeřábové kočky, pro kterou nedojde k překročení zadaných úhlů vychýlení.

Nespornou výhodou tohoto matematického popisu orientace na praktické použití, co se veličin vstupujících do výpočtu týče. Oproti již známým systémům nevstupuje do výpočtu hnací síla na obvodu pojezdového kola, nýbrž záběrový moment elektromotoru, který je uváděn v katalogovém listu výrobce elektromotoru. Ostatní vstupní veličiny taktéž není problém určit a to obzvláště v případě, že se jedná o novou jeřábovou kočku, u které výrobce uvádí naprostou většinu z těchto vstupních veličin. Jistou výhodou je také absence zpětné vazby a informace o poloze břemene.

Tento systém lze velmi jednoduše použít pro dva navzájem kolmé směry pohybu, tzn. současný pojezd jeřábového mostu a jeřábové kočky a to tak, že by byla uvažována stejná hodnota zrychlení daná výpočtem pro oba tyto směry.

Vzhledem k tomu, že dle teoretických výsledků je úhel vychýlení těžiště břemene vždy větší než úhel vychýlení jeřábové kladnice, dá se očekávat, že použití tohoto matematického popisu a jeho řešení přinese zvýšení životnosti lanového systému a drážkovaného lanového bubnu. Navíc, při použití řešeného systému nedochází ke vzniku rázů v pohonu pojezdu jeřábové kočky či jeřábového mostu, jako tomu je u vybraných systémů potlačujících kývání břemene.

7.2 Doporučení pro další postup ve vývoji a realizaci

S ohledem na řešenou problematiku, která je poměrně složitá a také aktuální, existuje poměrně značný prostor pro další vývoj problematiky kývání břemene při rozjezdu mostového jeřábu.

Pro další postup ve vývoji tohoto systému se třemi stupni volnosti by bylo obzvláště vhodné nejen pro účely měření použití jeřábové kočky s korigovanými, šikmými ozubenými převody, které by nižšími rázy vznikajícími při tomto tvarovém styku tolik neovlivňovaly naměřená data. Dále by bylo vhodné opracování pojezdové dráhy jeřábové kočky, zejména tedy stykových ploch. Přínosné by rovněž bylo měřicí pracoviště umožňující vyšší hodnotu délky odvinutého lana.

Co se týče eventuálního nasazení tohoto systému v praxi, tak vzhledem k tomu, že jeřábová váha je v současné době téměř standardní výbavou nově instalovaných mostových jeřábů a koček, stejně jako možnost použití cenově přijatelného senzoru délky odvinutého lana, který by mohl být namontován na ložiskovém domku lanového bubnu, je poměrně jednoduché získávat tyto informace v reálném čase. Zbývá tak vyřešit problém měření vzdálenosti mezi těžištěm břemene a jeřábovým hákem a dále stanovení hmotového momentu setrvačnosti zavěšeného břemene. V případě měření vzdálenosti mezi těžištěm břemene a jeřábovým hákem by bylo možné použít laserový metr, popř. tuto vzdálenost odhadnout. Stanovení momentu setrvačnosti břemene k jeho těžišti je však již poměrně obtížné. Možností je využití údaje z jeřábové váhy o hmotnosti břemene a následné snímání obrysových rozměrů CCD kamerou, což by ovšem ve spojení s odpovídajícím hardwarovým a softwarovým vybavením znamenalo citelný nárůst pořizovací ceny systému a tím jeho rentabilitu.

Jak již bylo tedy nastíněno, výrazný pokrok by zcela jistě znamenalo spojení tohoto systému s nasazením moderních elektronických systémů, samozřejmě za předpokladu mezioborové kooperace, která je s ohledem na složitost problematiky opravdu nutná. Nicméně, spojením aparátu vyšší matematiky s nejmodernějšími elektronickými systémy by se zcela jistě dosáhlo vynikající přesnosti a funkčnosti systému.

Conclusion, the results and recommendation for the next development

This dissertation thesis deals with problem of swinging of a load at the start of an overhead crane or electric hoist.

Firstly, a definition of problem called swinging of a load with reference to fleet angle onto grooved cable drum is stated, as well as a description of the present state in this field. This description includes systems and means available in the European market that restrict the load swinging.

On the basis of description of the present state, the aims of the dissertation thesis were specified.

The subsequent part of this dissertation thesis deals with improvement of the mathematical theory that describes a motion of an overhead crane or electric hoist. The next degree of freedom is considered, thus the innovated mathematical theory also deliberates the load shape.

An approximate solution as well as the numeric solution of the mathematical description of the electric hoist motion makes it possible to plot charts of deflection and acceleration of the inquired unknowns as well as to determine the maximal value of electric hoist acceleration. At this acceleration value, the allowed values of wire rope and load deflection, which may be set in approximate solution, will be adhered.

It has been achieved a high accuracy of an approximate solution, even in case of greater values of deflection angles. Conformity of an approximate solution with numerical solution is for the all three degrees of freedom on high level.

An accuracy of innovated mathematical description and its solution was experimentally verified on a measurement assembly constructed for purposes of this dissertation. Design and calculation of the measurement assembly are stated as well.

The measuring of acceleration of the electric hoist, the wire rope end and the load CG for two loads with different shape were performed. It has been proven that the measuring data of acceleration of the electric hoist and the wire rope end are in accordance with the theoretical data. Nevertheless, a significant effect of the load shape on its acceleration hasn't been proven. However, it is apparent that the shape of the load as well as a distance between load CG and wire rope fitting have a significant effect on the wire rope end electric hoist acceleration.

The main benefit of this dissertation thesis is the introduction of the innovated mathematical theory with three degrees of freedom describing the start of electric hoist with suspended load.

On the basis of solved equations of motion, it is possible both in approximate and numerical solution to find out for the specific load the deflection and acceleration courses of the electric hoist, wire rope end and load CG. It's also possible to set maximal values of deflection of the wire rope end and the load CG. On the basis of these values and the other values, the value of electric hoist acceleration is calculated and for this value the mentioned deflection values will be adhered.

Next advantage of this system is focus on the practice. The starting torque of electric motor is considered, in contrast to other known system where the driving force acting on the wheel circumference is considered, as well as the other entry quantities that are usually known from the manufacturer of the electric hoist.

This mathematical theory can be simply used for two mutually perpendicular directions, i.e. for overhead crane and electric hoist travel assuming that the same acceleration value is deliberated.

Inasmuch as the deflection value of the load CG is nearly always greater than deflection value of the wire rope end, we may expect that using of this innovated mathematical theory will results in a higher service life of the wire rope system and grooved cable drum, without the surge load in electric motor moreover.

With reference to solved problem which is actual and relatively difficult, there is a considerable area for the next development of this mathematical theory and its application.

Using of electric hoist with helical corrected gearing may be very profitable in reference to surge loading that rises from this transmission. Working of the crane track could be also very useful. These modifications certainly lower the disturbance of the measuring data.

In case of practice using of this mathematical theory, there is necessary to solve the problem with measuring the distance between load CG and crane hook as well as the load inertia determination. In all likelihood, the using of modern electronic elements such a CCD camera will be necessary, but it may be very profitable.

Seznam použité literatury

Monografie, odborné články

- [1] REMTA, F.; KUPKA, L.; DRAŽAN, F. *Jeřáby : I. díl*. Praha : SNTL, 1974. 642 s.
- [2] ČSN ISO 4308-1. *Jeřáby a zdvihací zařízení – Výběr ocelových lan – Část 1: Všeobecně*. Praha : Český normalizační institut, 2004. 24 s.
- [3] BOOM, T. J. J.; KLAASSENS, J. B.; MEILAND, R. REAL-TIME TIME-OPTIONAL CONTROL FOR A NONLINEAR CONTAINER CRANES USING A NEUTRAL NETWORK. *Informatics in Control : Automation and Robotics II* [online]. 2007, č. 1, s. 79-84. ISBN 978-1-4020-5626-0. Dostupný z WWW: <<http://www.springerlink.com/content/m3k2x77117820700/>>.
- [4] KAWAI, H.; KIM, Y. B.; CHOI, Y. W. Anti-sway system with image sensor for container cranes. *Journal of Mechanical Science and Technology* [online]. 2009, č. 23, s. 2757-2765. ISSN 1976-3824. Dostupný z WWW: <<http://www.springerlink.com/content/10063k40t8743130/>>.
- [5] MAHFOUF, M.; KEE, C. H.; ABBOD, M. F.; LINKENS, D. A. Fuzzy Logic-Based Anti-Sway Control Design for Overhead Cranes. *Neural Computing & Applications* [online]. 2000, roč. 9, č. 1, s. 38-43. ISSN 1433-3058. Dostupný z WWW: <<http://www.springerlink.com/content/v3jaeqmh3qh58jbv/>>.
- [6] PODEŠVA, J. *Dynamika v příkladech*. Ostrava : VŠB-TU Ostrava, 2005. 196 s. ISBN 80-7078-678-7.
- [7] NOSKIEVIČ, P., VANĚK, M., STRNAD, K.: *Použití programu MATLAB-Simulink a Virtual Reality toolboxu při návrhu a experimentálním ověření řízení jeřábové kočky*. VŠB-TU Ostrava, Fakulta strojní, Katedra automatizační techniky a řízení.
- [8] BRÁT, V.; STEJSKAL, V.; VOTÍPKA, F. *Základy dynamiky strojů a konstrukcí*. Praha : ČVUT, 1982. 282 s.
- [9] ČSN 27 0103. *Navrhování ocelových konstrukcí jeřábů. Výpočet podle mezních stavů*. Praha: Federální úřad pro normalizaci a měření, 1981. 68 s.
- [10] LEINVEBER, J., VÁVRA, P. *Strojnické tabulky*. Praha: Albra, 2003. 865 s. ISBN 80-86490-74-2.
- [11] ČSN 73 1401. *Navrhování ocelových konstrukcí*. Praha: Český normalizační institut, 1998. 148 s.

- [12] PODEŠVA, Jiří. *Aplikovaná mechanika – soubor přednášek*. VŠB – Technická univerzita Ostrava. Fakulta strojní. 2008.
- [13] JANŮŠOVÁ, Libuše. *Snímání rozsahu pohybu pacienta s ortotickou pomůckou*. Ostrava, 2010. 70 s. Diplomová práce (Ing.). VŠB - Technická univerzita Ostrava. Fakulta elektrotechniky a informatiky. 2010.
- [14] HRABOVSKÝ, Leopold. *Jeřáby – soubor přednášek*. VŠB – Technická Univerzita Ostrava. Fakulta strojní. 2012.
- [15] BRIŠ, Radim, LITSCHMANNOVÁ, Martina. *Statistika I. pro kombinované studium*. Elektronické skriptum, Ostrava, VŠB-TUO, 2004.
- [16] LITSCHMANNOVÁ, Martina. *Statistika I. – řešené příklady*. Studijní opora pro výuku Statistiky I., Ostrava, VŠB-TUO, 2007.

Internetové stránky

- [17] *Webové stránky výrobce mostových jeřábů Ing. A. Fritz Voith Ges.m.b.H. & Co.KG*. URL: <<http://www.voith.at>> [citováno 29. ledna 2011]
- [18] *Webové stránky dodavatele průmyslové techniky SCS servis spol. s r.o.*
URL: <<http://www.scs-servis.cz/aktivni-stabilizace-kyvani-bremene.php>>
[citováno 31. ledna 2011]
- [19] *Webové stránky výrobce průmyslové elektroniky Hetronic Deutschland GmbH*
URL: <http://hetronic.com/applications/material_handling>
[citováno 3. února 2011]
- [20] *Webové stránky výrobce průmyslové elektroniky Schneider Electric*
URL: <<http://www.schneider-electric.cz/documents/original-equipment-manufacturers/afb/hoisting/anti-sway-sensorless.pdf#page=1>>
[citováno 2. Listopadu 2011]
- [21] *Webové stránky obchodní společnosti AISE, s.r.o.*
URL: <<http://www.aisezlin.cz/?id=57>> [citováno 25. června 2010]
- [22] *Webové stránky obchodní společnosti ELEKTROPOHONY spol. s r.o.*
URL: <http://www.epo.cz/stahovani-souboru/doc_download/107-012-clanek-v-novinach-cez-cz-modernizace-mostovych-jezabu-v-elektrarne-detmarovice.html>
[citováno 29. ledna 2011]

- [23] *ZSTAR3 Accelerometer Family Expansion* [online]. c2003 [cit. 2004-04-28]. URL: <http://cache.freescale.com/files/sensors/doc/fact_sheet/ZSTAR3BOARDFS.pdf?fp=1>.

Použitý software

- [1] *Microsoft Excel Professional Plus 2010*. Microsoft Corporation, 2010.
- [2] *Pro/ENGINEER Wildfire 2.0*, Educational Edition. PTC, 2004.
- [3] *ANSYS WorkbenchTM 11.0*. ANSYS, Inc., 2007.
- [4] *ZSTAR3 GUI*, v. 0.2.4.2. Freescale Semiconductor, Inc.
- [5] *STATGRAPHICS Plus 5.0*. STATPOINT TECHNOLOGIES, Inc., 1994.

Publikace autora

Publikace vztahující se k tématu disertační práce

VRANÍK, P. Rozjezd mostového jeřábu s ohledem na úhel náběhu lana na drážkovaný lanový buben. *Perner's Contacts* [online]. 2010, roč. 5., č. I., s. 287–291. Dostupný z WWW: <http://pernerscontacts.upce.cz/17_2010/Vranik.pdf>. ISSN 1801-674X.

VRANÍK, P. Derivation of equations of motion for the start of an electric hoist by means of Lagrange equations of the second kind. *Perner's Contacts* [online]. 2010, roč. 5., č. IV., s. 280–285. Dostupný z WWW: <http://pernerscontacts.upce.cz/20_2010/Vranik.pdf>. ISSN 1801-674X.

VRANÍK, P. Návrh ocelové konstrukce měřicího pracoviště pro řízení rozběhu jeřábové kočky. *Perner's Contacts* [online]. 2011, roč. 6., č. I., s. 420–428. Dostupný z WWW: <http://pernerscontacts.upce.cz/21_2011/Vranik.pdf>. ISSN 1801-674X.

VRANÍK, P. Statický výpočet nosné ocelové konstrukce měřicího pracoviště. *Zdvihací zařízení v teorii a praxi* [online]. 2011, č. 1/2011, s. 42–57. Dostupný z WWW: <<http://www.id.vsb.cz/zdvihacizarizeni/zz-2011-1.pdf>>. ISSN 1802-2812.

VRANÍK, P. Solution of equations of motion for the start of an electric hoist. *Perner's Contacts* [online]. 2011, roč. VI., č. 3., s. 171–186. Dostupný z WWW: <http://pernerscontacts.upce.cz/23_2011/Vranik.pdf>. ISSN 1801-674X.

VRANÍK, Pavel. Rozjezd jeřábové kočky s ohledem na kývání břemene, *XXXVII. mezinárodní konference kateder dopravních, manipulačních, stavebních a zemědělských strojů*, pp. 11–14, ISBN 978-80-214-4323-5, (2011), Vysoké učení technické v Brně.

VRANÍK, P. Vliv tvaru břemene na zrychlení břemene při rozjezdu jeřábové kočky. *Perner's Contacts* [online]. 2012, roč. 7., č. I. ISSN 1801-674X. V řešení.

Publikace z oboru hydraulických nakládacích jeřábů

VRANÍK, P. Srovnání výkonnosti jednoduchého kloubového a pákového systému hydraulického nakládacího jeřábu. *Zdvihací zařízení v teorii a praxi* [online]. 2009, č. 2/2009, s. 63–68. Dostupný z WWW: <<http://www.id.vsb.cz/zdvihacizarizeni/zz-2009-2.pdf>>. ISSN 1802-2812.

VRANÍK, P. Otáčecí ústrojí hydraulických nakládacích jeřábů. *Perner's Contacts* [online]. 2010, roč. 5., č. III., s. 416–421. Dostupný z WWW: <http://pernerscontacts.upce.cz/19_2010/Vranik.pdf>. ISSN 1801-674X.

VRANÍK, P. Vlastnosti profilů teleskopických výložníků hydraulických nakládacích jeřábů. *Zdvihací zařízení v teorii a praxi* [online]. 2010, č. 1/2010, s. 63–66. Dostupný z WWW: <<http://www.id.vsb.cz/zdvihacizarizeni/zz-2010-1.pdf>>. ISSN 1802-2812.